PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2’5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Determinar un valor del parámetro a para que el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=a \\ x-y+z=1 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$ sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible indeterminado es necesario que los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada sean iguales y menor que el número de incógnitas.

Teniendo en cuenta que las columnas primera y tercera son iguales, el rango de M es 2, ya que existen menores de orden 2 distintos de cero, con lo cual, para que el sistema sea compatible indeterminado basta con que el rango de M’ también sea 2. Tomando las columnas $\{c_2,\ c_3,\ c_4\}$ resulta:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -a-3+3a-1=0\ ;;\ 2a-4=0\ ;;\ a-2=0\ ;;\ \underline{\underline{a=2}}$$

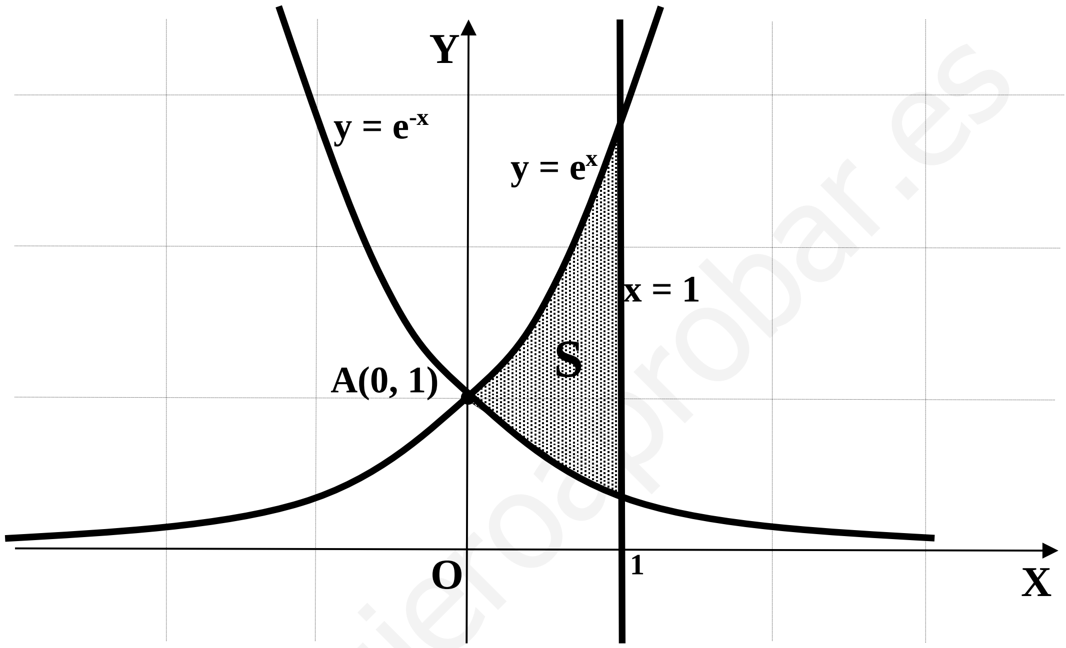
El único valor de a que satisface la condición pedida es a = 2.

****

2º) Representar gráficamente el recinto plano limitado por las curvas $y = e^x$ e $y = e^{-x}$, y por la recta x = 1. Calcular su área.

Se trata de dos funciones exponenciales cuyas características más importantes son las siguientes: en su dominio, que es R, son monótona creciente la primera y decreciente la segunda; las dos pasan por el punto A(0, 1) y tienen como asíntota al eje X.

La representación gráfica aproximada de la situación es la que sigue:



$$S = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) \cdot dx = \int_0^1 e^x \cdot dx - \int_0^1 e^{-x} \cdot dx = P - Q \qquad (*)$$

$$P = \int_0^1 e^x \cdot dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{e-1}$$

$$Q = \int_0^1 e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = t \\ dx = -dt \end{array}\right. \left\| \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow t = -1 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\int_0^{-1} e^t \cdot dt = \int_{-1}^0 e^t \cdot dt = \left[e^t\right]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e} = \underline{\frac{e-1}{e}}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de P y Q, resulta:

$$S = e - 1 - \frac{e-1}{e} = \frac{e^2 - e - e + 1}{e} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} = \underline{\underline{\frac{(e-1)^2}{e} = S}}$$

****

3º) Hallar la derivada en x = 0 de la función $f[f(x)]$, donde $f(x)=(1+x)^{-1}$.

$$f(x)=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$$

$$f'[f(x)]=\frac{1\cdot(2+x)-(1+x)\cdot 1}{(2+x)^2}=\frac{2+x-1-x}{(2+x)^2}=\underline{\frac{1}{(2+x)^2}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{(2+0)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

****

4º) Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Sea P(x, y, z) el punto genérico que satisface las condiciones del problema.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la expresión:

$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$ siendo Q y $\overrightarrow{v}$ un punto y un vector director de r, respectivamente.

El punto y el vector de r pueden ser: $Q(1,\ 0,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ -1)$.

$$d(P,\ r) = 2 = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left|(P-Q) \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left|(x-1,\ y,\ z-1) \wedge (1,\ 1,\ -1)\right|}{\left|\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\right|} =$$

$$= \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\left|-yi+(x-1)k+(z-1)j-yk-(z-1)i+(x-1)j\right|}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left|(-y-z+1)i+(z-1+x-1)j-(x-1-y)k\right|}{\sqrt{3}}\ ;;$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{(1-y-z)^2+(x+z-2)^2+(x-y-1)^2}\ ;;$$

$$12 = 1+y^2+z^2-2y-2z+2yz+x^2+z^2+4+2xz-4x-4z+x^2+y^2+1-2xy-2x+2y =$$

$$= 2x^2+2y^2+2z^2-6x-6z-2xy+2xz+2yz+6\ ;;$$

$$\underline{\underline{x^2+y^2+z^2-3x-3z-xy+xz+yz-3=0}}$$

Se trata de un cilindro de radio 2 unidades, cuyo eje es la recta r.

Para determinar un punto hacemos, por ejemplo, $\left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ y operando obtenemos el valor de z, y resulta el punto $\underline{\underline{P\left(1,\ 1,\ \frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)}}$

****

REPERTORIO B

1º) Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible. Interpretarlo geométricamente.

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea incompatible, basta, por ejemplo, que dos de los planos (ecuaciones) que forman el sistema sean paralelos y no coincidentes, es decir: que sus vectores normales sean linealmente dependientes.

Puede servir como ejemplo el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x-3y-z=5 \end{cases}$

La solución es evidente: el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3.

El rango de la matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ es dos debido a que, en realidad, solo tiene dos vectores linealmente independientes, ya que los dos primero son iguales (podían ser proporcionales).

Según el Teorema de Rouché, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea incompatible es que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes.

La interpretación geométrica de todos los casos que se pueden presentar son las siguientes, considerando las matrices M y M' de coeficientes y ampliada, respectivamente:

$$\underline{\underline{Rang\ M=1\ \ ;;\ \ Rang\ M'=2}}$$

$a)\ Planos\ \ paralelos\ \ dos\ \ a\ \ dos:\ Ejemplo \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

$b)\ Dos\ \ planos\ \ coincidentes\ \ y\ \ paralelos\ \ al\ \ tercero:\ Ejemplo \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{matrix}\right\} \\ x+y+z=5 \end{cases}$

$$\underline{\underline{Rang\ M = 2 \quad ;; \quad Rang\ M' = 3}}$$

a) *Planos secantes que se cortan dos a dos*: *Ejemplo* $\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$

b) *Dos planos paralelos y secantes al tercero*: *Ejemplo* $\Rightarrow \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x + 3y - 5z = 3 \\ 2x + 6y - 10z = 7 \end{array} \right\} \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

$$**********$$

2º) Calcular el valor de la integral $I = \int_1^e \frac{L\,x}{x^2} \cdot dx$, donde L denota el logaritmo neperiano. (puede hacerse por partes).

$$I = \int_1^e \frac{L\,x}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\,x = u \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = du \\ \frac{1}{x^2} \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{x} \cdot dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left[L\,x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_1^e =$$

$$= \left[-\frac{L\,x}{x} + \int x^{-2} \cdot dx \right]_1^e = \left[-\frac{L\,x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^e = \left[-\frac{1}{x}(L\,x+1) \right]_1^e = \left[-\frac{1}{e}(L\,e+1) \right] - \left[-\frac{1}{1}(L1+1) \right] =$$

$$= -\frac{1}{e}(1+1) + 1 \cdot (0+1) = -\frac{2}{e} + 1 = \underline{\underline{\frac{e-2}{e} = I}}$$

****

3º) Representar gráficamente la función $f(x) = x - 2\,sen\ x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Por ser f(x) la diferencia de dos funciones continuas, f(x) es continua y su dominio es R.

$$f(-x) = -x - 2\,sen(-x) - x + 2\,sen\ x = -(x - 2\,sen\ x) = -f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función f(x) es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte con los ejes son:

$$Eje\ \ X \Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x - 2\,sen\ x = 0\ \ ;;\ \ sen\ x = \frac{x}{2}\ \ ;;\ \ x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$$

El origen de coordinadas es el único punto de corte con los ejes.

$$f'(x) = 1 - 2\cos\ x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos\ x = 0\ \ ;;\ \ \cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ \ radianes,}\ \ \forall k \in N$$

$$En\ \ el\ \ intervalo\ \ -\pi < x < \pi\ \ el\ \ valor\ \ de\ \ k\ \ sólamente\ \ es\ \ k = 0.$$

$$f''(x) = 2\,sen\ x\quad ;;\quad f''\left(\pm\tfrac{\pi}{3}\right) = 2\,sen\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo} \\ \\ x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo} \end{cases}$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\,sen\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow Mín.\ \ relativo: \underline{\underline{P\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

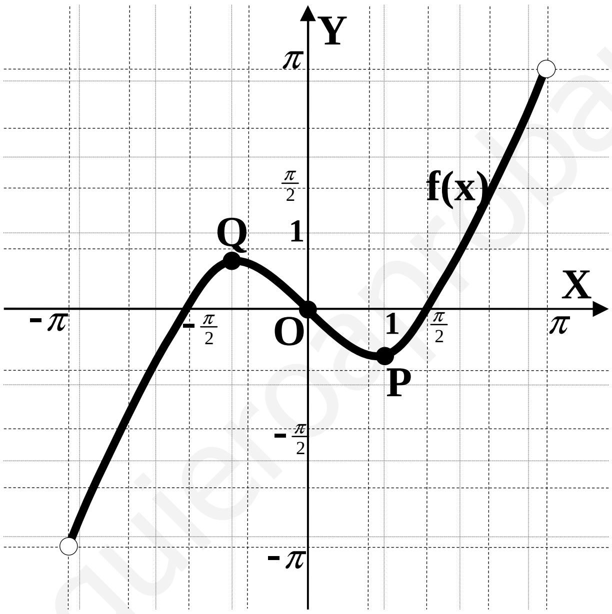
$$Por\ \ simetría\ \ con\ \ respecto\ \ al\ \ origen:\ Máx.\ \ relativo: \underline{\underline{Q\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0\quad ;;\quad f'''(x) = 2\cos\ x\ \ ;;\ \ f'''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.(0,\ 0)}}$$

La tabla de valores es la siguiente:

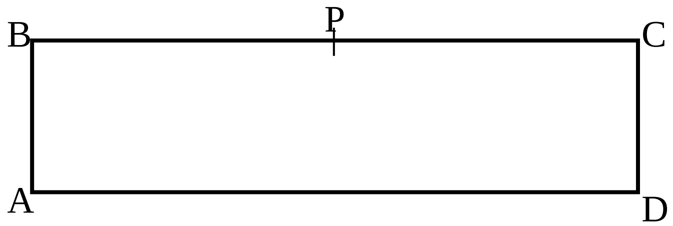
x	f(x)
$-\pi$	$-\pi$
0	0
π	π
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi-3\sqrt{3}}{3} \cong 0'68$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi-4}{2} \cong 0'43$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi-4\sqrt{2}}{4} \cong 0'63$

La representación gráfica es, aproximadamente, la que se indica la figura:



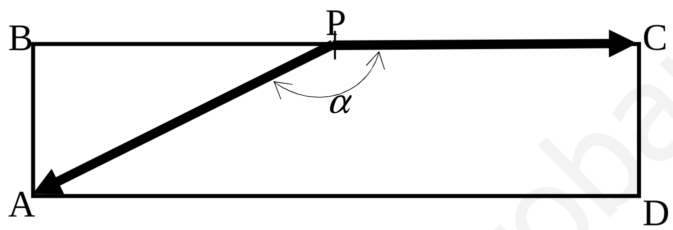
****

4º) Si los lados de un rectángulo ABCD miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo PAC, donde P es el punto medio del lado BC:



Una forma de calcular el ángulo pedido es considerar el rectángulo situado en unos ejes coordenados, siendo los puntos considerados, por ejemplo los siguientes:

A(0, 0); B(0, 1); C(4, 1); D(4, 0) y P(2, 1).



Considerando los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PC}$, que son:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} = A - P = (-2,\ -1) \\ \overrightarrow{PC} = C - P = (2,\ 0) \end{cases}$$

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \left|\overrightarrow{PA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PC}\right| \cdot \cos\alpha \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PC}\right|} = \frac{(-2,\ -1)\cdot(2,\ 0)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{-4-0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}} = \frac{-4}{\sqrt{20}} = -0'8944 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 153^\circ\ 26'\ 6''}}$$

****