PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2010 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II　　　　　　　　Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Considere las funciones $f(x) = sen^2\,x$ y $g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)} \cdot dt$, 0 < x < 1. Calcule la derivada de la función $F(x) = g[f(x)]$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Simplifique en lo posible dicha derivada.

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)} \cdot dt \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l|l} 1-t=u & t=x \to u=1-x \\ dt=-du & t=0 \Rightarrow u=1 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; g(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_1^{1-x} \frac{-1}{u} \cdot du =$$

$$= -\frac{1}{2}[L\,u]_1^{1-x} = -\frac{1}{2}[L(1-x) - L\,1] = -\frac{1}{2}[L(1-x) - 0] = \underline{-\frac{1}{2}L(1-x) = g(x)}. \quad (0 < x < 1)$$

$$F(x) = g[f(x)] = -\frac{1}{2}L(1 - sen^2\,x) = -\frac{1}{2}L\cos^2 x = \underline{-L\cos\,x = F(x)}. \quad \left(\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F'(x) = -\frac{-sen\,x}{\cos\,x} = \underline{\underline{tag\,\,x = F'(x)}}$$

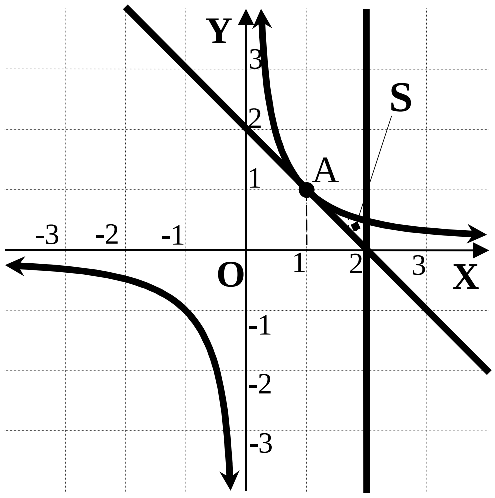
****

2º) a) Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la hipérbola $x \cdot y = 1$, su recta tangente en el punto A(1, 1) y la recta x = 2.

b) Calcule el área de dicha región plana.

----

a)



La recta tangente tiene como pendiente la derivada de la función para x = 1:

$$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \;;;\; y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow m = y'(1) = -\frac{1}{1^2} = \underline{-1}.$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, para A(1, 1) y m = -1 es:

$$y - 1 = -1(x-1) = -x + 1 \Rightarrow \underline{t \equiv y = -x + 2}.$$

El punto de corte de la tangente con la recta x = 2 es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 2 \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 + 2 = 0 \;;;\; y = 0 \Rightarrow \underline{B(2,\ 0)}.$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

b)

$$S = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x+2)\right] \cdot dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} + x - 2\right] \cdot dx = \left[L\,x + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(L\,2 + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(L1 + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) = L\,2 + 2 - 4 - 0 - \frac{1}{2} + 2 = L\,2 - \frac{1}{2} \cong \underline{\underline{0'19\ u^2 = S}}.$$

****

3º) Discuta, en función del parámetro α, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y=a+1 \\ -2x-y+az=-2 \\ (a+1)x+y-z=2 \end{array}\right\}$.

(No es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \\ a+1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a+1 \\ -2 & -1 & a & -2 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1+a(a+1)-a-2=-1+a^2+a-a=a^2-1=0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \underline{a_1=-1} \\ \underline{a_2=1} \end{array}\right. .$$

$$\underline{\underline{Para \;\left\{\begin{array}{l} a_1 \ne -1 \\ a_2 \ne 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 3 = n^o \;\; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; a=-1 \Rightarrow \; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{C_1=C_2+C_3\} \;\Rightarrow\; Rango \;\; A' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+2+4=4\ne 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-1 \Rightarrow \; Rango \;\; A=2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; A'=3 \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

$$Para \;\; a=1 \Rightarrow \; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{F_2=-F_3\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; de \;\; A'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=1 \Rightarrow \; Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 2 < n^o \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

****

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$, obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a 1 y sea ortogonal al vector $\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1)$.

Un punto P de r es P(1, α, α) y un punto Q de s es Q(β, 0, β).

El vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ es $\overrightarrow{u} = Q - P = (\beta,\ 0,\ \beta) - (1,\ \alpha,\ \alpha) = \underline{(\beta - 1,\ -\alpha,\ \beta - \alpha) = \overrightarrow{u}}$.

Si los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales su producto escalar tiene que ser cero:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1) \cdot (\beta - 1,\ -\alpha,\ \beta - \alpha) = -\beta + 1 + \beta - \alpha = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\alpha = 1}$.

El vector pedido es de la forma $\overrightarrow{u} = (0,\ -1,\ \beta - 1)$; como tiene que ser unitario, su módulo tiene que ser la unidad:

$\left| \overrightarrow{u} \right| = 1 \ \Rightarrow \ \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (\beta - 1)^2} = 1 \ ;; \ 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 = 1 \ ;; \ \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \ ;;$

$(\beta - 1)^2 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\beta = 1}$.

<u>Los puntos pedidos son P(1, 1, 1) y Q(1, 0, 1).</u>

****

OPCIÓN B

1º) a) Estudie el dominio, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = L(1 + x^2)$, donde L denota el logaritmo neperiano.

b) Represente la gráfica de $f(x) = L(1 + x^2)$ utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior.

----

a)

Siendo $1 + x^2 > 0, \ \ \forall x \in R$, <u>el dominio de f(x) es R.</u>

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{x = 0}.$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente; para que exista un máximo o un mínimo relativo es necesario que la segunda derivada sea negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot (2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \underline{\frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = f''(x)}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{1} = 2 > 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{La \ \ función \ \ f(x) = L(1 + x^2) \ tiene \ un \ mínimo \ relativo \ para \ x = 0}}$$

Teniendo en cuenta que el denominador de $f''(x)$ es positivo para cualquier valor real de x, para determinar su signo basta con estudiar su numerador.

$$f''(x) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = 0 \ ;; \ 1 - x^2 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{x_1 = -1} \ ;; \ \underline{x_2 = 1}.$$

Una función es cóncava $(\cap)$ cuando es negativa la segunda derivada y convexa $(\cup)$ cuando es positiva.

Las raíces anteriores dividen el dominio de la función (R) en tres intervalos que son alternativamente positivos y negativos. Siendo $f''(0) = 2 > 0$ se puede concluir que:

$$\underline{\underline{Para \ \ x \in (-1, \ 1) \ \Rightarrow \ f''(x) > 0 \ \Rightarrow \ Convexidad \ \ (\cup)}}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ x \in (-\infty, \ -1) \cup (1, \ +\infty) \ \Rightarrow \ f''(x) < 0 \ \Rightarrow \ Concavidad \ \ (\cap)}}$$

Para que existan puntos de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada; esta condición es necesaria pero no suficiente, pues para que exista punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

$$f'''(x)=\frac{-4x\cdot\left(1+x^2\right)^2-2\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-4x\cdot\left(1+x^2\right)-8x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3}=\underline{\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=f'''(x)}.$$

$f'''(-1)\neq 0$ y $f'''(1)\neq 0$, <u>existen puntos de inflexión para x = -1 y para x = 1.</u>

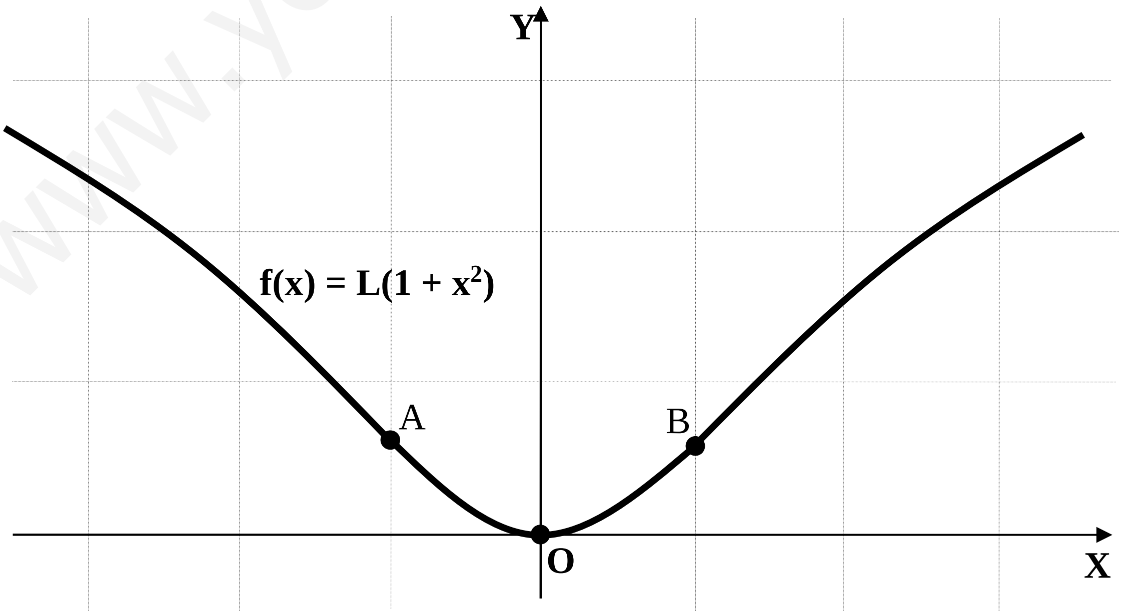
b)

El mínimo absoluto de la función es el siguiente: $f(0)=L1=0 \;\Rightarrow\; \underline{O(0,\;0)}$.

Los puntos de inflexión son los siguientes: $f(\pm 1)=L2 \;\Rightarrow\; \underline{A(-1,\;L2)}$ y $\underline{B(1,\;L2)}$.

Siendo $1+x^2>1$ teniendo en cuenta los logaritmos neperianos de los números mayores que 1 son positivos, el recorrido de la función es $(0,\;+\infty)$.

Considerando que la función $f(x)=L\left(1+x^2\right)$ es continua en su dominio (R), que es simétrica con respecto al eje Y por ser $f(-x)=f(x)$ y que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, su representación gráfica aproximada, teniendo en cuenta todo lo anterior, es la que indica la siguiente figura.



****

2º) Calcule las primitivas de la función $f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$, $x > 0$. (puede utilizarse el cambio de variable $t = e^x$).

$$\int f(x)\cdot dx=\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e^x=t \\ e^x\cdot dx=dt\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{1}{t-\frac{1}{t}}\cdot t\cdot dt=\int\frac{t^2}{t^2-1}\cdot dt=$$

$$=\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\cdot dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\cdot dt=\int dt+\int\frac{1}{t^2-1}\cdot dt=\underline{t+I}. \qquad (*)$$

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}=\frac{At+A+Bt-B}{t^2-1}=\frac{(A+B)t+(A-B)}{t^2-1}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ A-B=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2A=1\ ;;\ \underline{A=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{2}}.$$

$$I=\int\frac{1}{t^2-1}\cdot dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}\cdot dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\cdot dt=\frac{1}{2}L|t-1|-\frac{1}{2}L|t+1|=\underline{L\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}=I}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I y deshaciendo el cambio de variable:

$$I=\int\frac{1}{t^2-1}\cdot dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}\cdot dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\cdot dt=\frac{1}{2}L|t-1|-\frac{1}{2}L|t+1|=\underline{L\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}=I}$$

$$\int f(x)\cdot dx=e^x+L\sqrt{\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|}+C=e^x+L\sqrt{\left|\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)(e^x-1)}\right|}+C=e^x+L\sqrt{\frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}-1}}+C=$$

$$=\underline{e^x+L\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}+C}.$$

$$\underline{\underline{\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\cdot dx=e^x+L\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}+C}} \qquad (x>0)$$

****

3º) Determine el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$, según los valores de α.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{vmatrix}=2(a+1)^2-(a-2)-2-2(a+1)=$$

$$=2(a^2+2a+1)-a+2-2-2a-2=2a^2+4a+2-3a-2=2a^2+a=a(2a+1)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1=0} \;\;;;\;\; \underline{a_2=-\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a\neq 0 \;\; y \;\; a\neq -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; Rango \;\; A=3}}$$

$$Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{C_3=2C_2\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; A=2}.$$

$$Para \;\; a=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2}+1 & -1 & -\frac{1}{2}-2 \\ -1 & -\frac{1}{2}+1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; A=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=0 \;\; y \;\; a=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; Rango \;\; A=2}}$$

****

4º) a) Determine el plano π que pasa por el punto A(1, 0, 1) y es perpendicular a la recta r de ecuaciones $x+y+z=0$, $x-z=1$.

b) Calcule el punto P en el que se cortan r y π.

----

a)

La recta r tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v'}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-i+j-k+j=-i+2j-k \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{v}=(1,\ -2,\ 1)}.$$

El plano π pedido tiene como vector normal a $\overrightarrow{v}$ y su expresión general es de la forma $\pi \equiv x-2y+z+D=0$.

Como el plano π contiene al punto A(1, 0, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-2y+z+D=0 \\ A(1,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\; 1-2\cdot 0+1+D=0 \;\;;;\;\; 2+D=0 \;\;;;\;\; \underline{D=-2}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-2y+z-2=0}}$$

b)

El punto en el que se cortan r y π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ x-2y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=z \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} x+y+x=0 \\ x-2y+x-2=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x-2y=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3x=1 \;\;;;\;\; \underline{x=z=\frac{1}{3}} \;\;;;\;\; 2x+y=0 \;\;::\;\; \frac{2}{3}+y=0 \;\;;;\;\; \underline{y=-\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{\underline{P\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)}}$$

****