

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (tenga en cuenta que el ángulo x se mide en radianes).

a) Estudie los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

b) Estudie los puntos de inflexión de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x \notin (0, \pi) \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen}(2x) \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \cos(2x).$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos \pi = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 = 1 \Rightarrow \underline{\text{Máximo: } A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)}.$$

b)

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos(2x) = 0; \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

La condición anterior es necesaria pero no es suficiente; para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule su tercera derivada para el valor que anula la segunda:

$$f'''(x) = -4 \cdot \text{sen}(2x).$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} = -4 \cdot 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{P.I. para } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\text{P. I.: } B\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)}.$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcule una primitiva de $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{-2x}{e-x^2} - 2xe^{1-x^2} + 2x\cos x^2$ que cumpla $F(0) = 1$.

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(\frac{-2x}{e-x^2} - 2xe^{1-x^2} + 2x\cos x^2 \right) \cdot dx =$$

$$= -2 \int \frac{x}{e-x^2} \cdot dx - 2 \int xe^{1-x^2} \cdot dx + 2 \int x\cos x^2 \cdot dx = -2A - 2B + 2C = F(x).$$

$$A = \int \frac{x}{e-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e - x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot Lt = -\frac{1}{2} L(e - x^2).$$

$$B = \int xe^{1-x^2} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} \cdot e^t = -\frac{1}{2} e^{1-x^2}.$$

$$C = \int x\cos x^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt = \frac{1}{2} \text{sen } t = \frac{1}{2} \text{sen } x^2.$$

Sustituyendo en la expresión de F los valores obtenidos de A, B y C:

$$F(x) = -2 \cdot \left[-\frac{1}{2} L(e - x^2) \right] - 2 \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{1-x^2} \right] + 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sen } x^2 + C =$$

$$= L(e - x^2) + e^{1-x^2} + \text{sen } x^2 + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow L(e - 0) + e^{1-0} + \text{sen } 0 + C = 1; 1 + e + C = 1 \Rightarrow C = -e.$$

La función resulta, finalmente:

$$\underline{F(x) = L(e - x^2) + e^{1-x^2} + \text{sen } x^2 - e.}$$

3º) Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 3y + bz = b - 2 \\ bx + by = 1 \\ -x + z = b - 3 \end{array} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & b & b-2 \\ b & b & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & b-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -b^2 - 3b = 0; \quad -b(b+3) = 0 \Rightarrow \mathbf{b_1 = 0, b_2 = -3}.$$

$$\text{Para } \left\{ \begin{array}{l} b \neq 0 \\ b \neq -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } b = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3.$$

$$\text{Para } b = -3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -5 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 54 = -42 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3.$$

$$\text{Para } \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rang } A = 2; \text{ Rang } A' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

4º) Considere en R^3 los puntos $A(1, 1, -1)$ y $B(0, 1, 1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + y = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z = 0$.

a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Obtenga un punto P de la recta r cuya distancia al plano π_1 sea el doble de su distancia al plano π_2 , esto es, $d(P, \pi_1) = 2 \cdot d(P, \pi_2)$.

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (-1, 0, 2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

b)

Los puntos de la recta r tienen la expresión general: $P(1 - \lambda, 1, -1 + 2\lambda)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot (1 - \lambda) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 - \lambda + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}} \text{ unidades.}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|1 \cdot (1 - \lambda) - 1 \cdot (-1 + 2\lambda)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - \lambda + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{|2 - 3\lambda|}{\sqrt{2}} \text{ unidades.}$$

$$d(P, \pi_1) = 2 \cdot d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{|2 - 3\lambda|}{\sqrt{2}}; |2 - \lambda| = 2 \cdot |2 - 3\lambda| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 4 - 6\lambda \\ 2 - \lambda = -4 + 6\lambda \end{cases} \begin{cases} 5\lambda = 2 \rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{5} \\ 7\lambda = 6 \rightarrow \lambda_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$P_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ y = 1 \\ z = -1 + \frac{4}{5} = \frac{-1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P_1 \left(\frac{3}{5}, 1, \frac{-1}{5} \right)}$$

$$P_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \\ y = 1 \\ z = -1 + \frac{12}{7} = \frac{5}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P_2 \left(\frac{1}{7}, 1, \frac{5}{7} \right)}$$

OPCIÓN B

1º) Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \alpha & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + \beta x + \beta + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ definida a partir de los parámetros $\alpha, \beta \in R$.

a) Obtenga la relación que debe haber entre α y β para que f sea derivable en $x = 0$.

b) Para los valores de α y β obtenidos en el apartado b), ¿es f' derivable en $x = 0$? Razone la respuesta.

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en la recta real $\forall \alpha, \beta \in R$, excepto para $x = 0$, para el cual, se trata de determinar los valores de α y β para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3x + \alpha) = \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + \beta x + \beta + 1) = f(0) = \beta + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta + 1. \quad (*)$$

La función resulta $f(x)$ es derivable en R , excepto para $x = 0$, para cuya derivabilidad vamos a determinar los valores de α y β .

Una función es derivable en un punto cuando existen sus derivadas laterales en ese punto y además son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ -2x + \beta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = -3. \quad f'(0^+) = \beta \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \underline{\underline{\beta = -3.}}$$

$$\text{Sustituyendo en (*) el valor de } \beta: \alpha = -3 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -2.}}$$

b)

$$\text{La función resulta } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por supuesto que es derivable para $x = 0$; en otro caso el apartado anterior no estaría correctamente hecho: $f'(0^-) = f'(0^+) = -3$.

2º) a) Calcule los puntos en los que la recta $y = x - 1$ y el eje OX cortan a la parábola de ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$.

b) Dibuje, aproximadamente, el recinto plano limitado entre la parábola de ecuación $y = -x^2 + 6x - 5$ y la recta $y = x - 1$.

c) Calcule el área de dicho recinto plano.

a)

Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = x - 1; \quad x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Los puntos de corte se deducen fácilmente de la recta: $A(1, 0)$ y $B(4, 3)$.

b)

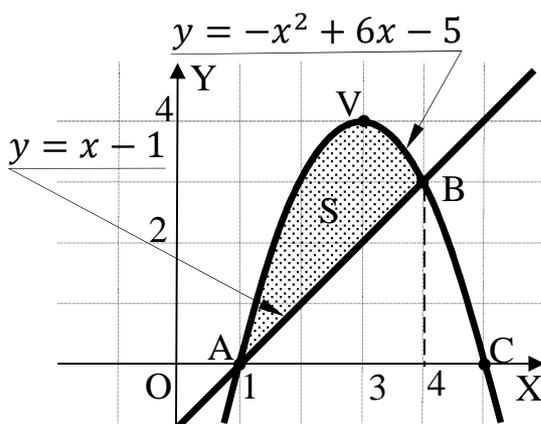
La parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ es cóncava (\cap) y su vértice es el siguiente:

$$y'(x) = -2x + 6. \quad y'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow V(3, 4).$$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola son los siguientes:

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 5 = 0; \quad x^2 - 6x + 5 = 0; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \\ = 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5 \Rightarrow A(1, 0) \text{ y } C(5, 0). \end{aligned}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se indica en la figura adjunta.



c)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 [(-x^2 + 6x - 5) - (x - 1)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) \cdot dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -\frac{63}{3} + 28 - \frac{5}{2} = -21 + 28 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{9}{2} u^2 = 4,5 u^2.}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz $C = 2A - B^2$.

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

a)

$$C = 2A - B^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj. de A^t}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 8 - 4 = -4. \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}}{-4} \Rightarrow A^{-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}}}$$

4º) Sean en R^3 los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

a) Calcule el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Obtenga un vector \vec{e}_1 de R^3 que cumpla $\cos \alpha (\vec{e}_1, \vec{u}) = 0$.

c) Obtenga un vector \vec{e}_2 de R^3 que cumpla $\sin \alpha (\vec{e}_2, \vec{v}) = 0$.

a)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + k - j \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)}}.$$

b)

Por la definición de producto escalar de dos vectores, siendo α el ángulo que forman:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{u} = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{u}|} = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \cdot \vec{u} = 0.$$

Siendo $\vec{e}_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in R$:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 1, 0) = \alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha.$$

El vector \vec{e}_1 es de la forma $\vec{e}_1 = (\alpha, -\alpha, \gamma), \forall \alpha, \gamma \in R$.

A modo de ejemplos: $\vec{e}_{11} = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_{12} = (3, -3, 5)$ y $\vec{e}_{13} = (-2, 2, 0)$

c)

Para que se cumpla que $\sin \alpha (\vec{e}_2, \vec{v}) = 0$ es necesario que los vectores \vec{e}_2 y \vec{v} sean paralelos, es decir, que sea 0° el ángulo que forman, por lo cual, sus componentes son proporcionales.

$$\text{Siendo } \vec{e}_2 = (\delta, \varphi, \mu) \text{ con } \delta, \varphi, \mu \in R: \underline{\underline{\frac{-1}{\delta} = \frac{0}{\varphi} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \delta = -\mu, \varphi = 0}}.$$

A modo de ejemplos: $\vec{e}_{21} = (1, 0, -1)$, $\vec{e}_{22} = (2, 0, -2)$ y $\vec{e}_{23} = (-3, 0, 3)$.
