PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$ o mejor: $\left.\begin{array}{r} 10 \leq x \leq 20 \\ y \leq 3x \\ 3x + 5y \geq 90 \end{array}\right\}$ y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Las restricciones son las siguientes: $\begin{cases} 10 \leq x \leq 20 \\ y \leq 3x \\ 3x + 5y \geq 90 \end{cases}$.

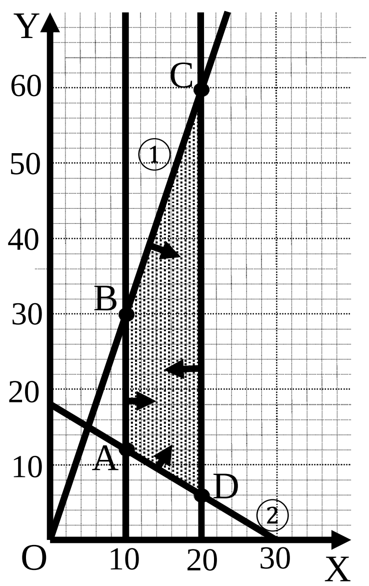
① $\Rightarrow y \leq 3x \Rightarrow P(4, 0) \rightarrow Si.$

x	0	20
y	0	60

② $\Rightarrow 3x + 5y \geq 90 \Rightarrow y \geq \frac{90-3x}{5} \Rightarrow$

x	0	30
y	18	0

$\Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$



La región factible es la zona sombreada de la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ 3x + 5y = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow 30 + 5y = 90;\;\; 5y = 60;\;\; y = 12 \Rightarrow A(10, 12).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow B(10, 30). \qquad C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow C(20, 60).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ 3x + 5y = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 + 5y = 90;\ \ 5y = 30;\ \ y = 6 \Rightarrow D(20, 6).$$

La función de objetivos es $f(x, y) = x - 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10, 12) = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 12 = 10 - 24 = -14.$

$B \Rightarrow f(10, 30) = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 30 = 10 - 60 = -50.$

$C \Rightarrow f(20, 60) = 1 \cdot 20 - 2 \cdot 60 = 20 - 120 = -100.$

$D \Rightarrow f(20, 6) = 1 \cdot 20 - 2 \cdot 6 = 20 - 12 = 8.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ C(20, 60)}.$

****

2º) La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función $f(x) = 35{,}7 \cdot \frac{x+2}{x^2+21}, x \in [0, 8]$, donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

a) Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

b) Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

c) Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

----

a)

La condición necesaria para que una función racional alcance un máximo o un mínimo relativos es que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 35{,}7 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+21) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2+21)^2} = 35{,}7 \cdot \frac{x^2+21-2x^2-4x}{(x^2+21)^2} = -35{,}7 \cdot \frac{x^2+4x-21}{(x^2+21)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -35{,}7 \cdot \frac{x^2+4x-21}{(x^2+21)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0; \;\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} = -2 \pm 5 \Rightarrow x_1 = -7, x_2 = 3; \; -7 \notin [0, 8].$$

$$f(3) = 35{,}7 \cdot \frac{3+2}{3^2+21} = 35{,}7 \cdot \frac{5}{30} = 5{,}95.$$

Los valores de la acción al comenzar y terminar la sesión son los siguientes:

$$f(0) = 35{,}7 \cdot \frac{0+2}{0^2+21} = 35{,}7 \cdot \frac{2}{21} = \frac{71{,}4}{21} = 3{,}40.$$

$$f(8) = 35{,}7 \cdot \frac{8+2}{8^2+21} = 35{,}7 \cdot \frac{10}{85} = \frac{357}{85} = 4{,}20.$$

$\underline{La\ acción\ alcanzó\ el\ máximo\ valor\ a\ las\ 3\ horas\ y\ fue\ de\ 5{,}95\ euros.}$

b)

$\underline{La\ acción\ alcanzó\ el\ mínimo\ valor\ a\ las\ 0\ horas\ y\ fue\ de\ 3{,}40\ euros.}$

c)

Coste de las acciones: $20 \cdot 3{,}40 = 68\ euros$

Valor de las acciones: $20 \cdot 4{,}20 = 84\ euros$

$84 - 68 = 16.$

$\underline{Obtuvo\ un\ beneficio\ de\ 16\ euros}.$

****

3º) El 70 % de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20 % que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5 % tiene experiencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?

b) Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?

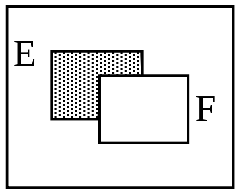
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

$P(E) \rightarrow Tener\ experiencia.$ $\qquad$ $P(F) \rightarrow Tener\ formación.$

Datos: $P(E \cap F) = 0{,}7.$ $\qquad$ $P\left(E \cap \overline{F}\right) = 0{,}2.$ $\qquad$ $P(E/F) = 0{,}875.$

a)

$P\left(E \cap \overline{F}\right) \Rightarrow$



$P\left(E \cap \overline{F}\right) = P(E) - P(E \cap F) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ P(E) = P\left(E \cap \overline{F}\right) + P(E \cap F) = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9.$

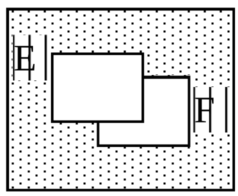
$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}9 = \underline{0{,}1}.$

b)

$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0{,}7}{0{,}9} = \underline{\frac{7}{9} = 0{,}7778}.$

c)

$P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) \Rightarrow$



$P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 1 - P(E \cup F).$ (*)

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$ (**)

Para hallar $P(F)$ tenemos en cuenta que $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E/F)} = \frac{0{,}7}{0{,}875} = \frac{700}{875} = 0{,}8.$ $\qquad$ Sustituyendo este valor en (**):

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}7 = 1.$

Sustituyendo en (*) el valor hallado de $P(E \cup F)$:

$P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - 1 = \underline{0}$.

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y la primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Sean x, y, z las calificaciones del alumno en las tres preguntas del examen, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=7{,}5 \\ z=y+1 \\ x=5\cdot(z-x) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+2y+2z=15 \\ y-z=-1 \\ x=5z-5x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+2y+2z=15 \\ y-z=-1 \\ 6x-5z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-75-10}{-10-12-12}=\frac{-85}{-34}=2{,}5.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-34}=\frac{10-90+12}{-34}=\frac{-68}{-34}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-34}=\frac{-12-90}{-34}=\frac{-102}{-34}=3.$$

$\underline{La\ puntuación\ fue\ de\ 2{,}5\ puntos\ en\ la\ 1^{a}\ pregunta, 2\ en\ la\ 2^{a}\ y\ 3\ en\ la\ 3^{a}.}$

****

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & si \;\; x \leq 3 \\ \frac{2}{a-x} & si \;\; x > 3 \end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de a para que $f(x)$ es continua en $x = 3$.

$b)$ Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

$c)$ Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

$a)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 3x - 20) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 20 = -2 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{a-x} = \frac{2}{a-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{2}{a-3};\;\; -2a + 6 = 2;\;\; 4 = 2a \Rightarrow a = 2.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 3\ para\ a = 2.}$$

$b)$

Para $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & si \;\; x \leq 3 \\ -\frac{2}{x} & si \;\; x > 3 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & si \;\; x \leq 3 \\ \frac{2}{x^2} & si \;\; x > 3 \end{cases}.$$

$$3x^2 - 3 = 0;\;\; 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\frac{2}{x^2} > 0, \forall x > 3$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).}$$

$$\underline{f(x)\ decreciente: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 1)}$$

$c)$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo local es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trate de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & si\ \ x \leq 3 \\ -\frac{4}{x^3} & si\ \ x > 3 \end{cases}.$$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18.$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22.$$

$$\underline{Máximo\ relativo\ en\ A(-1, -18)\ y\ mínimo\ relativo\ en\ B(1, -22)}.$$

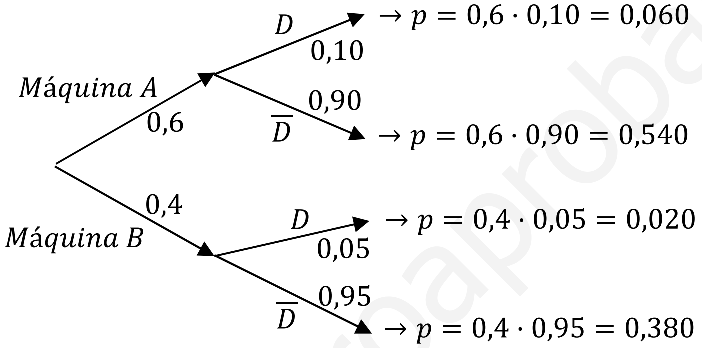
****

3º) El 60 % de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40 % de la máquina B. La proporción de compuestos electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?



a)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = 0{,}6 \cdot 0{,}10 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 0{,}060 + 0{,}020 = \underline{0{,}080}.$$

b)

$$P = P\left(A/\overline{D}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(A) \cdot P\left(\overline{D}/A\right)}{P(A) \cdot P\left(\overline{D}/A\right) + P(B) \cdot P\left(\overline{D}/B\right)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}90}{0{,}6 \cdot 0{,}90 + 0{,}4 \cdot 0{,}95} =$$

$$= \frac{0{,}540}{0{,}540 + 0{,}380} = \frac{0{,}540}{0{,}920} = \underline{0{,}5870}.$$

c)

$$P = P(D/B) = P(B) \cdot P(B/D) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}020}.$$

****