PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir cada uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, marionetas y rompecabezas producido.

Sean x, y, z los camiones, marionetas y rompecabezas que fabrica semanalmente el taller, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=89 \\ 2x+0{,}5y+0{,}8z=91 \\ 3x+4y+3{,}5z=313 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=89 \\ 20x+5y+8z=910 \\ 6x+8y+7z=626 \end{array}\right\}.$$

Se resuelve el sistema por el procedimiento de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 20 & 5 & 8 & 910 \\ 6 & 8 & 7 & 626 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - 20F_1 \\ F_3 \to F_3 - 6F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & -15 & -12 & -870 \\ 0 & 2 & 1 & 92 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 5 & 4 & 290 \\ 0 & 2 & 1 & 92 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 2 & 1 & 92 \\ 0 & 5 & 4 & 290 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 46 \\ 0 & 5 & 4 & 290 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 5F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 89 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 46 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}z = 60;\ \ 3z = 120 \Rightarrow z = 40. \qquad y + \frac{40}{2} = 46 \Rightarrow y = 26.$$

$$x + y + z = 89;\ \ x + 26 + 40 = 89;\ \ x + 66 = 89 \Rightarrow x = 23.$$

$\underline{Fabrica\ semanalmente\ 23\ camiones, 26\ marionetas\ y\ 40\ rompecabezas}.$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $x - 1 = 0 \to x = 1 \;\Rightarrow\; \underline{D(f) \Rightarrow R - \{1\}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \to O(0, 0)$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0;\;\; x^2 = 0;\;\; x = 0 \to O(0, 0)$.

$\underline{El\ \text{único}\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}$.

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \;\Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Aunque no se piden, se obtienen las asíntotas oblicuas.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x+1\ es\ asíntota\ oblicua.}$$

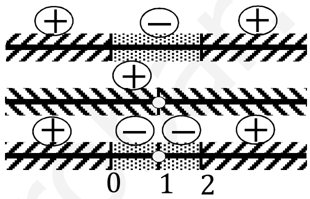
$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0;\ x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento: (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: (0, 1) \cup (1, 2).}$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - x(x-2)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

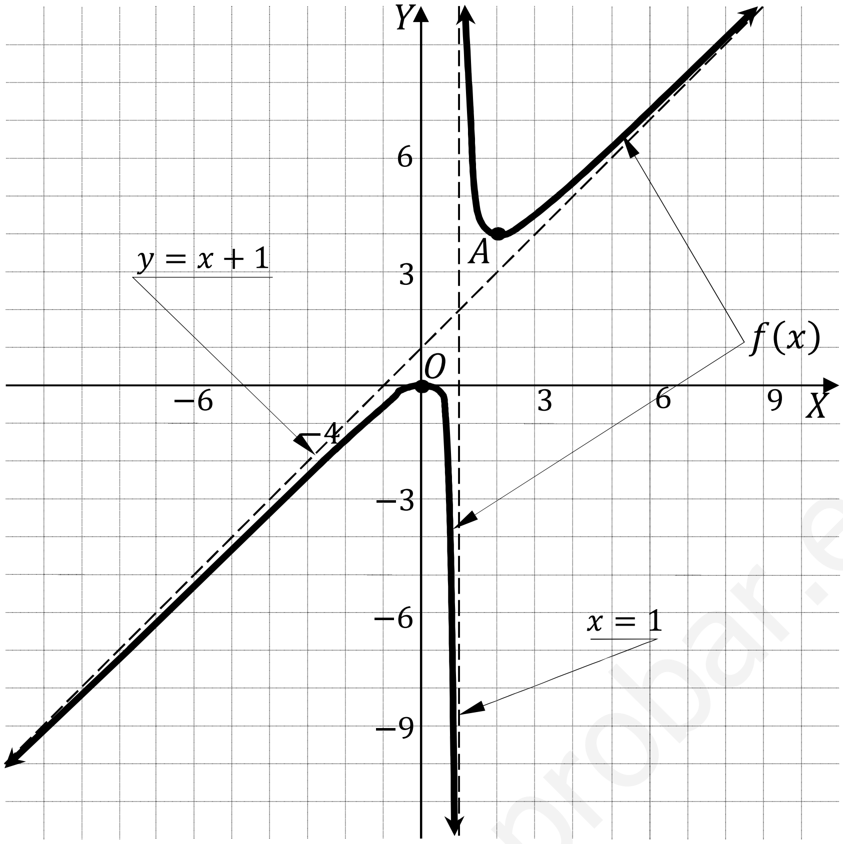
$$f(0) = \frac{0}{2-0} = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(2, 4)}.$$

$d)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:


Y
X
O
A
6
3
−3
−6
−9
−6
3
6
9
−4
$y = x + 1$
$f(x)$
$x = 1$

****

3º) De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A) = 0{,}4$; $P(A \cup B) = 0{,}8$ y $P(A^c \cup B^c) = 0{,}7$, donde $A^c y\ B^c$ representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

$a)$ ¿Son independientes los sucesos A y B?

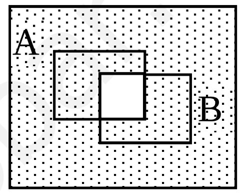
$b)$ La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

$c)$ La probabilidad de que se verifique el suceso B^c.

$d)$ La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B.

$a)$

$$P(A^c \cup B^c)^c = 1 - P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B) \Rightarrow$$



$A^c \cup B^c = 1 - (A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0{,}8 + 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}7.$$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

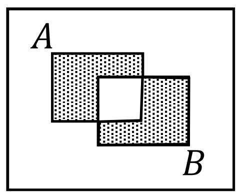
$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 \neq 0{,}3 = P(A \cap B).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

$b)$

La probabilidad pedida se deduce de la observación del gráfico adjunto.

$$P = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) =$$



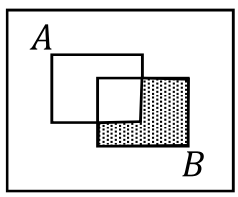
$$= 0{,}4 + 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}1 - 0{,}6 = \underline{0{,}5}.$$

$c)$

$$P = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3}.$$

$d)$

$$P = P(A^c/B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$$



$A^c \cap B = B - (A \cap B)$

$$= \frac{0{,}7 - 0{,}3}{0{,}7} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \underline{\frac{4}{7} = 0{,}5714}.$$

****

4º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$. b) Calcula $C + AB$.

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$?

----

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

c)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Adj.\,de\ C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$(C + AB)^{-1} = I^{-1} = I.$$

$$\underline{Queda\ probado\ que\ C^{-1} + (AB)^{-1}\ y\ (C + AB)^{-1}\ son\ iguales.}$$

****

5º) Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la siguiente función: $f(x) = 350x - x^2 - 15.000$, siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

$a)$ Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

$b)$ ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

$c)$ Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios.

$d)$ ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?

$a)$

Para que una función tenga un máximo relativo es necesario que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f(x) = -x^2 + 350x - 15.000.$ $\qquad f'(x) = -2x + 350.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 350 = 0;\ \ x - 175 = 0 \Rightarrow x = 175.$

$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 175$.

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ alquilando\ 175\ bicicletas\ cada\ mes.}$

$b)$

$f(175) = -175^2 + 350 \cdot 175 - 15.000 = -30.625 + 61.250 - 15.000 =$

$= 61.250 - 45.625 = 15.625.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ mensual\ es\ de\ 15.625\ euros.}$

$c)$

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 350x - 15.000 = 0;\ \ x^2 - 350x + 15.000 = 0;$

$x = \frac{350 \pm \sqrt{122.500 - 60.000}}{2} = \frac{350 \pm \sqrt{62.500}}{2} = \frac{350 \pm 250}{2} \Rightarrow x_1 = 50, x_2 = 300.$

$\underline{Tiene\ pérdidas\ si\ arrienda\ al\ mes\ menos\ de\ 50\ o\ más\ de\ 300\ bicicletas.}$

****

6º) En una determinada ciudad, se sabe que el 80 % de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30 % de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por último, se sabe que el 20 % de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Seleccionamos a azar un hogar de esta ciudad:

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Este ejercicio se puede hacer mediante una tabla de contingencia:

	1	>1	
$Suscrito\ a\ Panoramix$		$20\ \%$	$30\ \%$
$No\ suscrito\ a\ Panoramix$			
		$80\ \%$	

Completando la tabla de contingencia:

	1	>1	
$Suscrito\ a\ Panoramix$	$\mathbf{10}\ \%$	$20\ \%$	$30\ \%$
$No\ suscrito\ a\ Panoramix$	$\mathbf{10}\ \%$	$\mathbf{60}\ \%$	$\mathbf{70}\ \%$
	$\mathbf{20}\ \%$	$80\ \%$	$\mathbf{100}\ \%$

Ahora basta con aplicar la regla de Laplace:

a)

$$P=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{70}{100}=\underline{0{,}7}.$$

b)

$$P=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{10}{100}=\underline{0{,}1}.$$

c)

$$P=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{10}{20}=\underline{0{,}5}.$$

$d)$

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{20}{30} = \underline{0{,}6667}.$$

****