PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios propuestos.

Cada problema se puntuará de 0 a 3’3. La suma de las puntuaciones más 0’1 será la calificación final de esta prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria)

www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIO A

1º) Sea r_1 la recta que pasa por los puntos O(0, 0, 0) y B(80, 10, 0) y sea r_2 la recta que pasa por C(0, 0, 10) y D(m, 10, 10). Obtener la distancia entre r_1 y r_2. Justificar geométricamente que la distancia entre r_1 y r_2 es independiente del valor de m.

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (80,\ 0,\ 0)$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (m,\ 10,\ 10) - (0,\ 0,\ 10) = (m,\ 10,\ 0)$$

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 0)$ y un director de r_2 es $\overrightarrow{v} = (m,\ 10,\ 0)$.

Como puede observarse, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para diferenciar el caso determinamos un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de r_1, O(0, 0, 0) y por extremo otro punto de r_2, C(0, 0, 10): $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = (0,\ 0,\ 10)$.

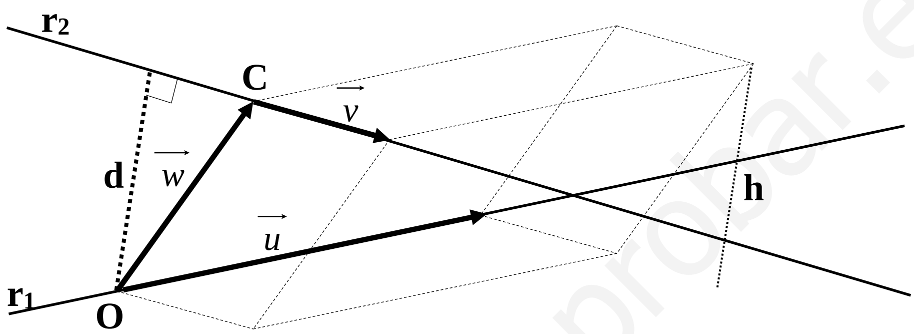
Si los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ están en el mismo plano las rectas r y s se cortan; en caso contrario se cruzan, o sea, si el rango de $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ es 2 las rectas se cortan y si el rango es 3 se cruzan:

$$Rang\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 3}}\ \ (\forall m \in R)$$

<u>En efecto, las rectas r y s se cruzan, independientemente del valor de m.</u>

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\overrightarrow{w}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

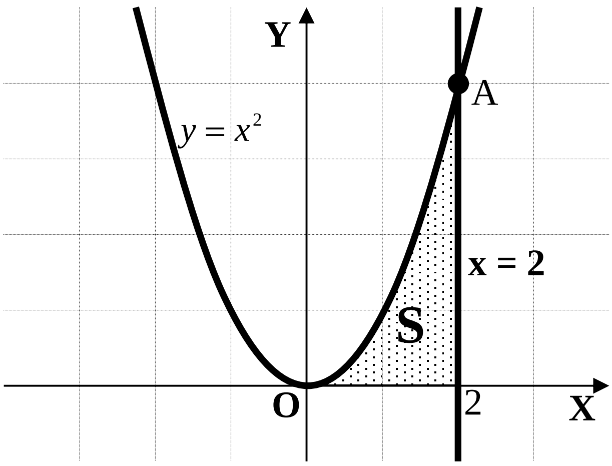
$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|}$$

$$d(r_1,\ r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{|100|}{|10k|} = \frac{100}{10} = \underline{\underline{10\ u = d(r_1,\ r_2)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

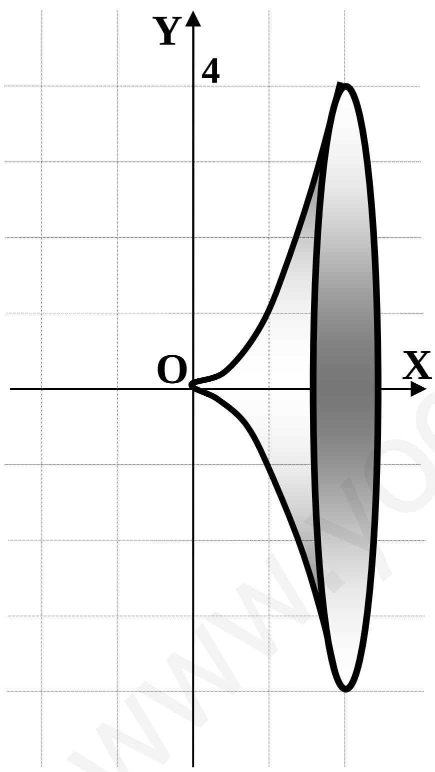
2º) Obtener el área de la superficie S limitada por el eje OX, la curva $y = x^2$, *con* $0 \leq x \leq 2$, y la recta x = 2. Calcular el volumen generado por la superficie S a dar la vuelta completa alrededor del eje OX.



El valor de la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3}\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{8}{3}\ u^2 = S}}$$

La superficie S al girar en torno al eje OX engendra el volumen que se indica en la figura.



Teniendo en cuenta que el volumen es la suma de infinitos círculos cuyo radio es el valor de la función, por consiguiente su valor es el sumatorio de ellos.

Siendo el área del círculo $S = \pi \cdot r^2$, el volumen pedido sería:

$$V = \sum_{x=00}^{x=2} \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \sum_{x=00}^{x=2} [f(x)]^2$$

La expresión anterior no es más que la integral definida de la expresión $\pi \cdot [f(x)]^2$, o sea:

$$V = \int_0^2 \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^2 [f(x)]^2 \cdot dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 \left(x^2\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^2 x^4 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(\frac{2^5}{5}\right) - 0\right] = \pi \cdot \frac{32}{5} = \underline{\underline{\frac{32\pi}{5}\ u^3 = V}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) La calificación en Matemáticas y Física de siete alumnos han sido:

Matemáticas (x)	8	9	6	7	8	6	2
Física (y)	7	7’5	5	7	7’5	5	7

Hallar el coeficiente de correlación de las calificaciones en Matemáticas y Física de los seis primeros alumnos.

Calcular el coeficiente de correlación de esas asignaturas para los siete alumnos.

Explicar la diferencia entre los resultados obtenidos.

El coeficiente de correlación viene dado por la fórmula $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, siendo σ_{xy} la covarianza, cuya fórmula es $\sigma_{xy}=\frac{\sum x_i \cdot y_i}{N}-\overline{x}\cdot\overline{y}$; los valores σ_x y σ_y son las respectivas desviaciones típicas, cuyas fórmulas son, respectivamente, las siguientes:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{x^2}} \quad y \quad \sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{y^2}}$$

Calculamos lo pedido para los seis primeros alumnos.

Los valores de las medias aritméticas son:

$$Matemáticas \Rightarrow \overline{x}=\frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}=\frac{8+9+6+7+8+6}{N}=\frac{44}{6}=\frac{22}{3}=\underline{\underline{7'3333=\overline{x}}}$$

$$Física \Rightarrow \overline{y}=\frac{\sum y_i \cdot n_i}{\sum n_i}=\frac{7+7'5+5+7+7'5+5}{N}=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}=\underline{\underline{6'5=\overline{y}}}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{x^2}}=\sqrt{\frac{8^2\cdot 2+9^2+6^2\cdot 2+7^2}{6}-7'3333^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{64\cdot 2+81+36\cdot 2+49}{6}-53'7778}=\sqrt{\frac{330}{6}-53'7778}=\sqrt{1'2222}=\underline{\underline{1'1055=\sigma_x}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{y^2}}=\sqrt{\frac{7^2\cdot 2+7'5^2\cdot 2+5^2\cdot 2}{6}-6'5^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{49\cdot 2+56'25\cdot 2+25\cdot 2}{6}-42'25}=\sqrt{\frac{260'5}{6}-42'25}=\sqrt{1'1667}=\underline{\underline{1'0801=\sigma_y}}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{8 \cdot 7 + 9 \cdot 7'5 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 7'5 + 6 \cdot 5}{6} - 7'3333 \cdot 6'5 =$$

$$= \frac{56 + 67'5 + 30 + 49 + 60 + 30}{6} - 47'6667 = \frac{292'5}{6} - 47'6667 = \underline{1'0833 = \sigma_{xy}}$$

$$.\, r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1'0833}{1'1055 \cdot 1'0801} = \frac{1'0833}{1'1941} = \underline{\underline{0'9072 = r}}$$

Calculamos ahora lo mismo para los siete alumnos.

Los valores de las medias aritméticas son:

$$Matemáticas \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{8 + 9 + 6 + 7 + 8 + 6 + 2}{N} = \frac{46}{7} = \underline{\underline{6'5714 = \bar{x}}}$$

$$Física \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{7 + 7'5 + 5 + 7 + 7'5 + 5 + 7}{N} = \frac{46}{7} = \underline{\underline{6'5714 = \bar{y}}}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{8^2 \cdot 2 + 9^2 + 6^2 \cdot 2 + 7^2 + 2^2}{7} - 6'5714^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{64 \cdot 2 + 81 + 36 \cdot 2 + 49 + 4}{7} - 43'1837} = \sqrt{\frac{334}{7} - 43'1837} = \sqrt{4'5306} = \underline{\underline{2'1285 = \sigma_x}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{7^2 \cdot 3 + 7'5^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2}{7} - 6'5714^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{49 \cdot 3 + 56'25 \cdot 2 + 25 \cdot 2}{7} - 43'1833} = \sqrt{\frac{309'5}{7} - 43'1833} = \sqrt{1'0310} = \underline{\underline{1'0154 = \sigma_y}}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{8 \cdot 7 + 9 \cdot 7'5 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 7'5 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{7} - 6'5714^2 =$$

$$= \frac{56 + 67'5 + 30 + 49 + 60 + 30 + 14}{7} - 43'1837 = \frac{306'5}{7} - 43'1837 = \underline{0'6020 = \sigma_{xy}}$$

$$.\, r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0'6020}{2'1285 \cdot 1'0154} = \frac{0'6020}{2'1613} = \underline{\underline{0'2785 = r}}$$

www.yoquieroaprobar.es

De la observación de los casos de los seis alumnos o los siete son que:

<u>en el primer caso la correlación lineal es positiva y fuerte, ya que se aproxima a la unidad y, en el segundo caso, la correlación es débil por no aproximarse a la unidad</u>

El motivo es evidente: la mala nota última de matemáticas.

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Probar que para un valor real de m el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+mz=9 \end{cases}$ es indeterminado. Para ese valor de m encontrar todas las soluciones del sistema. Interpretar geométricamente el significado del sistema.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix} ;; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & m & 9 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix}=2m+5+9-6-15-m=m-7=0 \;\Rightarrow\; \underline{m=7}$$

$$Para\ m\neq 7 \;\Rightarrow\; Rango\,M = Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; \underline{Compatible\ \det er\min ado}$$

$$Para\ \ m=7 \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad El\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$\left.\begin{cases} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}=18+5+12-6-20-9=35-35=0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}=27+7+12-9-28-9=46-46=0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}=27+14+20-15-28-18=61-61=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow\ \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=7 \Rightarrow Rango\ M\ = Rango\ \ M'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

En efecto: para el valor real de m = 7 es sistema es Compatible Indeterminado, como teníamos que probar.

Vamos a resolver el sistema para el valor encontrado de m = 7 que, por ser compatible determinado, despreciamos una de las ecuaciones y resolvemos el sistema res-

www.yoquieroaprobar.es

tante, parametrizando una de las incógnitas.

Para m = 1 resulta el sistema homogéneo: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+7z=9 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \left.\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ x+2y=4-3\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x-y=-1+\lambda \\ x+2y=4-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=3-2\lambda}$$

$$x+y=1-\lambda \;;;\; x=1-\lambda-y=1-\lambda-(3-2\lambda)=\underline{-2+\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=3-2\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Cada una de las ecuaciones representa un plano y la interpretación gráfica del sistema es que tienen una recta en común. Como no existen planos coincidentes, se trata de tres planos que se cortan en una recta.

****

www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIO B

1º) Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ 3x+5y+mz=8 \end{cases}$ obtener para qué valores reales de m tiene una única solución y calcularla para cada uno de esos valores de m.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix} ;; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & m & 8 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix}=2m+5+3-6-5-m=m-3=0 \ \Rightarrow \ \underline{m=3}$$

$$\underline{\underline{Para \ m\neq 3 \ \Rightarrow \ Rango\, M = Rango \ M'=3=n^o \ incógnitas \ \Rightarrow Compatible \ \ Deter\min ado}}$$

No existe un único valor de m para el cual el sistema es compatible determinado, es decir, que tenga solución única.

$$Para \ \ m=3 \Rightarrow \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \ Rango \ \ M' \ \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 = C_3 \\ C_4 = C_1 + C_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \ m=3 \ \Rightarrow \ Rango\, M = Rango \ M'=2<n^o \ incógnitas \ \Rightarrow Compatible \ \ In\det er\min ado}}$$

Resolvemos para $m\neq 3$ aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & m \end{vmatrix}}{m-3}=\frac{4m+15+8-16-10-3m}{m-3}=\frac{m+23-26}{m-3}=\frac{m-3}{m-3}=\underline{\underline{1=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & m \end{vmatrix}}{m-3}=\frac{3m+8+6-9-8-2m}{m-3}=\frac{m-3}{m-3}=\underline{\underline{1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 8\end{vmatrix}}{m-3}=\frac{16+10+9-12-15-8}{m-3}=\frac{35-35}{m-3}=\underline{\underline{0=z}}$$

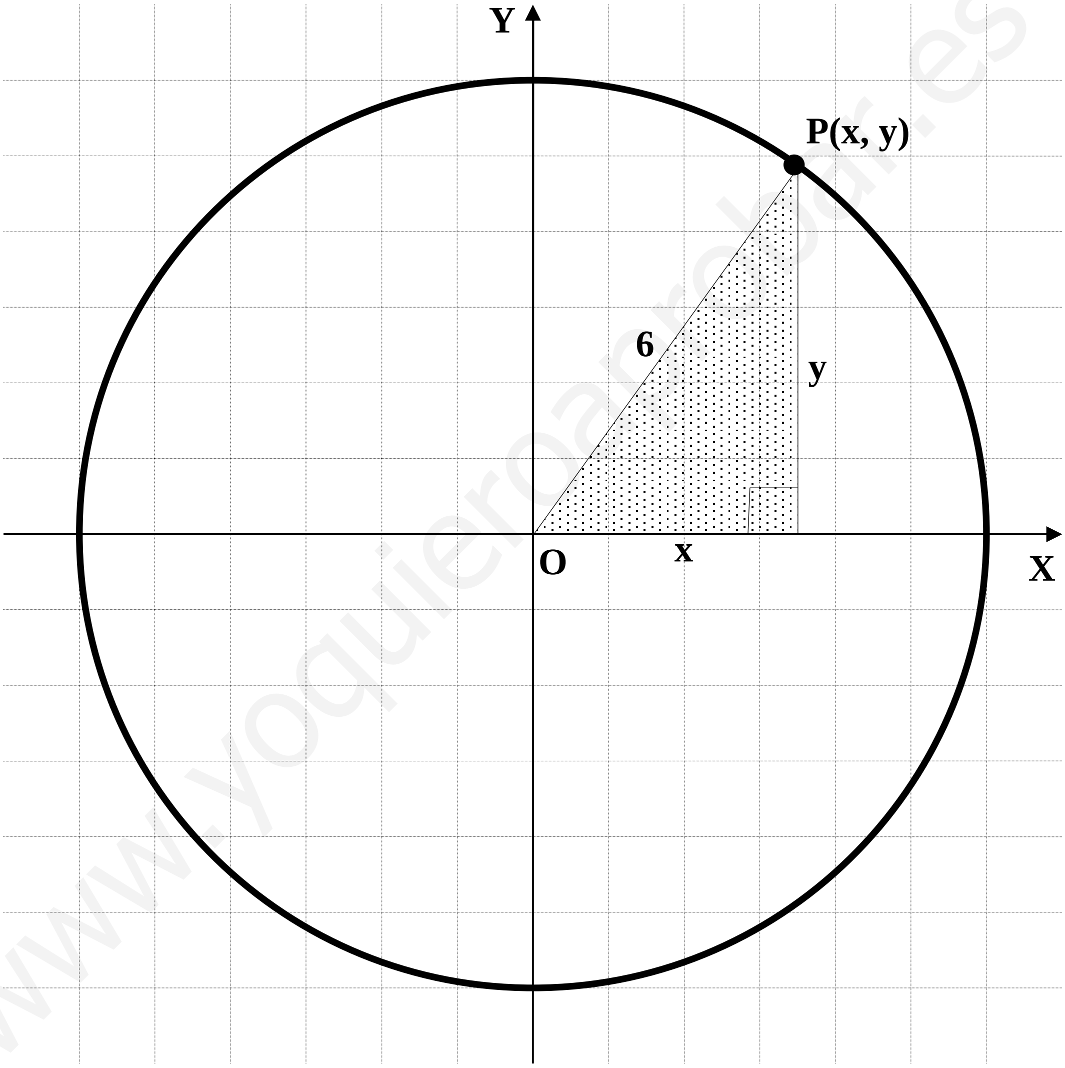
****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Los puntos P(x, y) que verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 36$ forman una curva. Explicar la relación entre la ecuación $x^2 + y^2 = 36$ y alguna característica geométrica de esa curva.

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$ representa geométricamente una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 6, es decir: es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es de 6 unidades.

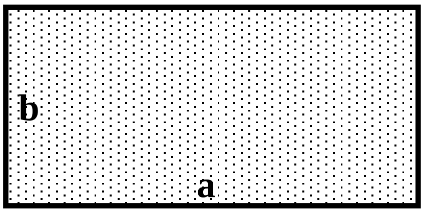
En el gráfico puede observarse la justificación de la definición dada anteriormente a la ecuación.



www.yoquieroaprobar.es

****

3º) Descomponer un segmento de longitud 200 metros, en cuatro partes de manera que esas partes sean los lados de un rectángulo cuya área sea la máxima dentro de la familia de rectángulos del perímetro 200 metros.



Se trata de calcular los valores a y b para que el área del rectángulo sea máxima, teniendo en cuenta que $p = 2a + 2b = 200 \ \ metros$;; $\underline{a + b = 100}$.

La superficie es $S = a \cdot b$.

Para que la superficie sea máxima es necesario que su derivada sea cero. Para poder derivar hemos de expresar S en función de una sola incógnita, por lo cual despejamos, por ejemplo b, de la expresión $a + b = 100$;; $b = 100 - a$.

$S = a \cdot b = a \cdot (100 - a) = 100a - a^2$;; $S' = 100 - 2a$;;

$\underline{S'' = -2 < 0 \Rightarrow Justificación \ \ de \ \ máximo}$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2a = 0$;; $100 = 2a$;; $\underline{a = 50}$;; $b = 100 - a = 100 - 50 = \underline{50 = b}$
.

<u>El rectángulo de mayor superficie es un cuadrado de lado 50 metros.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) El 20 % de los tornillos de un gran lote son defectuosos. Se cogen tres tornillos al azar y se pide calcular razonadamente:

a) La probabilidad de que los tres sean defectuosos.

b) La probabilidad de que ninguno sea defectuoso.

c) La probabilidad de que solamente uno sea defectuoso.

Nota: El lote de tornillos es tan grande que tras la extracción de tres tornillos se puede suponer que quedan los mismos.

La probabilidad de que al coger al azar un tornillo y que sea defectuoso es:

$\underline{p = 0'2}$ y la probabilidad de que no sea defectuoso es $q = 1 - p = 1 - 0'2 = \underline{0'8 = q}$

$$a\ )\quad p = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot q^0 = 1 \cdot 0'2^3 \cdot 0'8^0 = 1 \cdot 0'2^3 \cdot 1 = \underline{\underline{0'008 = p}}$$

$$b\ )\quad p = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot q^3 = 1 \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0'8^3 = \underline{\underline{0'512 = p}}$$

$$c\ )\quad p = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^2 = 3 \cdot 0'2 \cdot 0'64 = \underline{\underline{0'384 = p}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es