PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2002

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios.

Cada problema se puntuará de 0 a 3'3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones mas 0'1 será la calificación de esta prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

1º) Para cada terna de números reales (x, y, z), se consideran las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \; y \; B=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los determinantes de las matrices A y B.

b) Para x = y = z = 1, calcular el determinante de la matriz producto A · B.

c) Obtener, razonadamente, para qué valores de x, y, z, ninguna de las matrices A y B tiene inversa.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=5x-3y+5z-3z+5x-5y=10x-8y+2z=\underline{\underline{2(5x-4y+z)=|A|}}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix}=-2y-2x+z-2y+2z+x=\underline{\underline{-x-4y+3z=|B|}}$$

b)

$$Para\quad x=y=z=1\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{pmatrix}\ y\ \ B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+2&1+1+1&1-1-1\\2+1-2&1+1-1&1-1+1\\6+5+10&3+5+5&3-5-5\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{pmatrix}}.$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{vmatrix}=-35-13+63+21-65+21=105-113=\underline{\underline{-8=|A\cdot B|}}.$$

Otra forma de resolver este apartado es teniendo en cuenta que el modulo de un producto de matrices es igual al producto de los módulos de las matrices. Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$$|A|=10x-8y+2z=10-8+2=\underline{4}\ \ ;;\ \ |B|=-1-4+3=\underline{-2}.$$

$$\underline{\underline{|A\cdot B|=4\cdot(-2)=-8}}$$

c)

Tiene que cumplirse que al mismo tiempo que $\begin{cases}2(5x-4y+z)=0\\-x-4y+3z=0\end{cases}$, sistema equivalente a $\begin{cases}5x-4y+z=0\\x+4y-3z=0\end{cases}$.

$$\begin{cases}5x-4y+z=0\\x+4y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}5x-4y=-\lambda\\x+4y=3\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\ 6x=2\lambda\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{1}{3}\lambda}\ \ ;;\ \ 4y=3\lambda-x=$$

$$=3\lambda-\frac{1}{3}\lambda=\underline{\frac{8}{3}\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\lambda\\y=\frac{8}{3}\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Dados los puntos A(1, -2, 3) y B(0, 2, 1), se pide:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por ambos puntos.

b) La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y de B.

c) La distancia al origen de la recta s, intersección del plano $\alpha \equiv 2y - z = 0$ con el plano π del apartado b).

----

a)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 1) - (1,\ -2,\ 3) = (-1,\ 4,\ -2).$$

Unas ecuaciones paramétricas de r pueden ser, por ejemplo:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \quad \forall \lambda \in R \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}}}$$

b)

El punto medio de A y B es $M\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 2\right)$.

El plano pedido π tiene como vector normal a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-1,\ 4,\ -2)$, por lo tanto su ecuación general es: $\pi \equiv -x + 4y - 2z + D = 0$.

Como el plano π debe contener al punto medio M, tiene que satisfacer su ecuación:

$$-1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + D = 0 \;;;\; -\frac{1}{2} - 4 + D = 0 \;;;\; D = 4 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{2} = D}$$

$$\pi \equiv -x + 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv 2x - 8y + 4z - 9 = 0}}$$

c)

La expresión de s por dos ecuaciones implícitas es $s \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 4z - 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$.

La distancia de un punto a una recta es $d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$, siendo $\overrightarrow{u}$ el vector director de la recta s y Q un punto cualquiera de la recta s.

Para determinar un punto y un vector director de s la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} 2x-8y+4z-9=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{y=\frac{1}{2}\lambda} \;;;\; 2x-4\lambda+4\lambda-9=0 \;;;\; \underline{x=\frac{9}{2}}$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de s son $P\left(\frac{9}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ y $\overrightarrow{u}=(0,\ 1,\ 2)$.

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|2i+9k-2i-18j|}{2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{|-18j+9k|}{2\sqrt{5}}=\frac{9\cdot|-2j+k|}{2\sqrt{5}}=\frac{9\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}{2\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{4+1}}{2\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{9}{2}=4'5\ u=d(P,\ r)}}$$

****

3º) Las horas de estudio y las calificaciones en Matemáticas de siete alumnos han sido:

Horas de estuido	17	17’5	13	17	17’5	15	4
Matemáticas	8	9	6	7	8	6	2

a) Hallar el coeficiente de correlación entre las calificaciones de Matemáticas y las horas de estudio de esos alumnos.

b) Explicar el significado del coeficiente de correlación.

c) Explicar razonadamente como se estima la calificación en Matemáticas que obtendría un alumno al estudiar 20 horas.

----

a)

El coeficiente de correlación viene dado por la fórmula $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, siendo σ_{xy} la covarianza, cuya fórmula es $\sigma_{xy}=\frac{\sum x_i \cdot y_i}{N}-\overline{x}\cdot\overline{y}$; los valores σ_x y σ_y son las respectivas desviaciones típicas, cuyas fórmulas son, respectivamente, las siguientes:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{x^2}} \quad y \quad \sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{y^2}}$$

Los valores de las medias aritméticas son:

$$Matemáticas \Rightarrow \overline{x}=\frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}=\frac{17\cdot 2+17'5\cdot 2+13+15+4}{7}=\frac{101}{7}=\underline{14'4286=\overline{x}}$$

$$Física \Rightarrow \overline{y}=\frac{\sum y_i \cdot n_i}{\sum n_i}=\frac{8\cdot 2+9+6\cdot 2+7+2}{7}=\frac{46}{7}=\underline{6'5714=\overline{y}}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{x^2}}=\sqrt{\frac{17^2\cdot 2+17'5^2\cdot 2+13^2+15^2+4^2}{7}-14'4286^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{578+612'5+169+225+16}{7}-208'1837}=\sqrt{\frac{1600'5}{7}-208'1837}=\sqrt{20'4592}=\underline{\underline{4'5232=\sigma_x}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{N}-\overline{y^2}}=\sqrt{\frac{8^2\cdot 2+9^2+6^2\cdot 2+7^2+2^2}{7}-6'5714^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{128+81+72+49+4}{7}-43'1837}=\sqrt{\frac{334}{7}-43'1837}=\sqrt{4'5306}=\underline{\underline{2'1285=\sigma_y}}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{17 \cdot 8 + 17'5 \cdot 9 + 13 \cdot 6 + 17 \cdot 7 + 17'5 \cdot 8 + 15 \cdot 6 + 4 \cdot 2}{7} -$$

$$- 14'4286 \cdot 6'5714 = \frac{136 + 157'5 + 78 + 119 + 140 + 90 + 8}{7} - 94'8161 = \frac{728'5}{7} - 94'8161 =$$

$$= 104'0714 - 94'8161 = \underline{9'2553 = \sigma_{xy}}$$

$$.\, r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{9'2553}{4'5232 \cdot 2'1285} = \frac{9'2553}{9'6277} = \underline{\underline{0'9613 = r}}$$

b)

Al estar el valor del coeficiente de correlación muy próximo a la unidad, podemos asegurar que la correlación entre el número de horas de estudio y las notas obtenidas en Matemáticas es muy fuerte. La nube de puntos esta muy adaptada a una recta.

c)

Debido a lo observado en el apartado anterior, los datos se ajustan con suficiente precisión a una recta, que es la recta de regresión, que permite estimaciones como la que se nos pide.

La fórmula de la recta de regresión (de y sobre x) es la siguiente:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\left(x - \overline{x}\right) \Rightarrow y - 6'57 = \frac{9'26}{4'52^2}\left(x - 14'43\right) = 0'45\left(x - 14'43\right) = 0'45x - 6'49 \;;;$$

$$y = 0'45x + 0'08 \Rightarrow y_{(20)} = 0'45 \cdot 20 + 0'08 = 9'08 \cong \underline{9'1}$$

<u>Un alumno que estudiara 20 horas diarias, se espera una nota en Matemáticas de 9’1.</u>

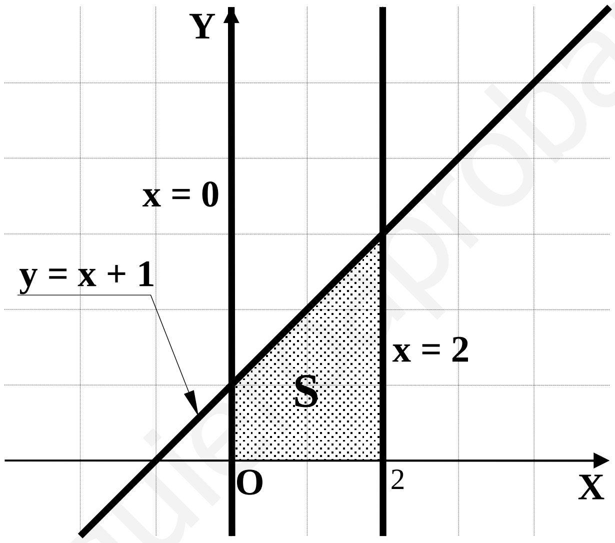
****

4º) Hallar el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1}(x+1)\cdot dx=\frac{9}{2}$. Obtener razonadamente, la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX y las rectas $y=x+1$, x = 0 y x = 2.

$$\int_0^{a-1}(x+1)\cdot dx=\frac{9}{2}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\ \middle\|\ \begin{matrix} x=a-1\rightarrow t=a \\ x=0\rightarrow t=1 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \int_1^a t\cdot dt=\frac{9}{2}\ ;;\ \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^t=\frac{9}{2}\ ;;$$

$$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\ ;;\ a^2=10\ \Rightarrow\ a>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=\sqrt{10}}}$$

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



El valor de la superficie pedida es la siguiente:

$$\int_0^2(x+1)\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\ \middle\|\ \begin{matrix} x=2\rightarrow t=3 \\ x=0\rightarrow t=1 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \int_1^3 t\cdot dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3=\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4\ u^2=S}}$$

****

EJERCICIO B

1º) Para cada número real λ, $M(\lambda)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M^{-1}(\lambda)$, inversa de $M(\lambda)$.

b) Calcular la matriz $M^{-1}(0)$.

c) Si A = M(8), B = M(4) y C = M(3), calcúlese, razonadamente, el determinante de la matriz producto $AB^{-1}C^{-1}$.

----

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2\lambda^2 + 6\lambda - \lambda^2 - 8\lambda + 6 = \underline{\lambda^2 - 2\lambda + 2 = |M|}$$

$$|M| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \;;;\; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \underline{\lambda \notin R} \Rightarrow \underline{|M| \neq 0,\ \forall \lambda \in R}$$

La matriz M es inversible para cualquier valor real de λ.

b)

$$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; M^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; |M| = 2$$

$$Adj\,(M^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$|M| = |\lambda^2 - 2\lambda + 2| \Rightarrow \begin{cases} |M(8)| = |8^2 - 2\cdot 8 + 2| = |64 - 16 + 2| = |50| = 50 \\ |M(4)| = |4^2 - 2\cdot 4 + 2| = |16 - 8 + 2| = |10| = 10 \\ |M(3)| = |3^2 - 2\cdot 3 + 2| = |9 - 6 + 2| = |5| = 5 \end{cases}$$

$$X = AB^{-1}C^{-1} = \frac{A}{B \cdot C} \Rightarrow |X| = \frac{|A|}{|B| \cdot |C|} = \frac{|M(8)|}{|M(4)| \cdot |M(3)|} = \frac{50}{10 \cdot 5} = \frac{50}{50} = 1$$

$$\underline{\underline{|X| = \left|AB^{-1}C^{-1}\right| = 1}}$$

****

2º) a) Hallar la distancia del punto P(3, -1, 4) a la recta r intersección de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x + 4y - z + 9 = 0$.

b) La ecuación del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

----

a)

La distancia de un punto a una recta es $d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo $\overrightarrow{v}$ el vector director de la recta r y Q un punto cualquiera de la recta r.

Para determinar un punto y un vector director de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 4x + 4y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y = -5 + \lambda \\ 4x + 4y = -9 + \lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -4x - 2y = 10 - 2\lambda \\ 4x + 4y = -9 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 1 - \lambda \ ;;\ \underline{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda} \ ;;\ \left.\begin{matrix} 8x + 4y = -20 + 4\lambda \\ -4x - 4y = 9 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x = -11 + 3\lambda \ ;;\ \underline{x = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\lambda}$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v} = (3,\ -2,\ 4)} \Rightarrow Punto \Rightarrow \{\lambda = 1\} \Rightarrow \underline{Q(-2,\ 0,\ 1)}$$

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,\ -1,\ 4) - (-2,\ 0,\ 1) = (5,\ -1,\ 3)$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{\left| -4i + 9j - 10k + 3k + 6i - 20j \right|}{\sqrt{9 + 4 + 16}} =$$

$$= \frac{\left| 2i + 11j - 7k \right|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{2^2 + 11^2 + (-7)^2}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{4 + 121 + 49}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{174}{29}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(P,\ r)}}$$

b)

El plano pedido π tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\overrightarrow{v} = (3,\ -2,\ 4)$ y al vector $\overrightarrow{QP} = (5,\ -1,\ 3)$ y contiene a P. Su expresión general es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{QP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;$$

$$-6(x-3)+20(y+1)-3(z-4)+10(z-4)+4(x-3)-9(y+1)=0\ \ ;;$$

$$-2(x-3)+11(y+1)+7(z-4)=0\ \ ;;\ \ -2x+6+11y+11+7z-28=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-11y-7z+11=0}}$$

****

3º) Considerar las funciones $f(x)=arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y $g(x)=arc\ \cos\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, definidas para $x\geq 0$. Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$ y expresarlas del modo más simplificado posible. Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entra f(x) y g(x).

$$f(x)=arc\ sen\ u \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow f(x)=arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\underline{u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\ ;;\ u'=\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=\underline{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}=u'}$$

$$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}=f'(x)}}$$

$$g(x)=arc\ \cos\ u \Rightarrow g'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow g(x)=arc\ \cos\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\underline{u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\ ;;\ u'=\frac{-1\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{-x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=\underline{\frac{-x\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}=u'}$$

$$g'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\frac{x\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}}=$$

$$=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}=g'(x)}}$$

Como puede apreciarse, las derivadas son iguales lo que significa que las funciones se diferencian en una constante.

****

4º) El 20 % de los habitantes de una gran ciudad votan al partido político B. Se seleccionan al azar tres habitantes y se pide calcular razonadamente:

a) La probabilidad de que los tres voten al partido B.

b) La probabilidad de que ninguno vote al partido B.

c) La probabilidad de que solamente uno vote al partido B.

Nota: El número de habitantes es tan grande que siempre se puede considerar que después de seleccionar uno, dos o tres ciudadanos se tienen que un 20 % de los no seleccionados son los que votan al partido B.

La probabilidad de que un individuo elegido al azar vote al partido B es

$\underline{p = 0'2}$ y la probabilidad de que no sea defectuoso es $q = 1 - p = 1 - 0'2 = \underline{0'8 = q}$

$$a\ )\quad p = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot q^0 = 1 \cdot 0'2^3 \cdot 0'8^0 = 1 \cdot 0'2^3 \cdot 1 = \underline{\underline{0'008 = p}}$$

$$b\ )\quad p = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot q^3 = 1 \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0'8^3 = \underline{\underline{0'512 = p}}$$

$$c\ )\quad p = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^2 = 3 \cdot 0'2 \cdot 0'64 = \underline{\underline{0'384 = p}}$$

****