PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO - 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 2 horas

Se elegirá el Ejercicio A o el B, del que sólo se harán tres de los cuatro ejercicios.
En ningún caso se podrá elegir simultáneamente el problema 4º-1 y el problema 4º-2.

Cada problema se puntuará de 0 a 3'3, según la puntuación máxima indicada en cada apartado. La suma de las puntuaciones mas 0'1 será la calificación de esta prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{array}\right\}$, con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Hallar el conjunto de soluciones del sistema para el caso compatible determinado.

c) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix}=-4+\lambda^2+2-4+\lambda-2\lambda=0 \;;;\; \lambda^2-\lambda-6=0 \;;;$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_1 = 3} \\ \underline{\lambda_2 = -2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 3 \\ \lambda \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

Para $\lambda = 3$ resulta $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, que como puede observarse, tiene la cuarta columna proporcional a la primera con lo cual resulta que:

$$\underline{\underline{Para\ \lambda = 3 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

$$Para\ \lambda = -2\ resulta\ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.\ El\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$|M'| \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0\ \{C_1 = -C_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \lambda = -2 \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Vamos a resolverlo para compatible determinado. Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{-4\lambda + 3\lambda^2 + 6 - 12 + \lambda^2 - 6\lambda}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{4\lambda^2 - 10\lambda - 6}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{(\lambda-3)(4\lambda+2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2(2\lambda+1)}{\lambda+2} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{-6\lambda + 6\lambda - 2\lambda - 6\lambda + 6 + 2\lambda^2}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2\lambda^2 - 8\lambda + 6}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2(\lambda-3)(\lambda-1)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2} = y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6\end{vmatrix}}{\lambda^2-\lambda-6}=\frac{12+\lambda^3-6\lambda-4\lambda-3\lambda^2+6\lambda}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\frac{\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=$$

$$=\frac{(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda-2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)}=\underline{\underline{\lambda-2=z}}$$

c)

Para compatible indeterminado: $\lambda=3$. El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=9 \\ 2x+3y-2z=6 \end{array}\right\}$$. Despreciando la última ecuación y parametrizando, por ejemplo, z:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=t} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=3-t \\ 3x+2y=9+t \end{array}\right\} \;;;\; \left.\begin{array}{r} 2x-2y=6-2t \\ 3x+2y=9+t \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=15-t \;;;$$

$$\underline{x=3-\frac{1}{5}t} \;;;\; \left.\begin{array}{r} -3x+3y=-9+3t \\ 3x+2y=9+t \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=4t \;;;\; \underline{y=\frac{4}{5}t}$$

Las infinitas soluciones se obtienen dando valores a t en la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x=3-\frac{1}{5}t \\ y=\frac{4}{5}t \\ z=t \end{cases}}}$$

****

2º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=-5$; $\pi_2 \equiv x-3y-z=3$ y la recta r dada por sus ecuaciones continuas: $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos $\pi_1 \ \ y \ \ \pi_2$.

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

----

a)

La recta s expresada por unas ecuaciones implícitas es: $s \equiv \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x-3y-z-3=0 \end{cases}$.

Parametrizando z : $\left.\begin{array}{r} x+y=-5-z \\ x-3y=3+z \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-5-z \\ -x+3y=-3-z \end{array}\right\}$;; $4y=-8-2z$

$\underline{y=-2-\frac{1}{2}k}$;; $\left.\begin{array}{r} 3x+3y=-15-3z \\ x-3y=3+z \end{array}\right\}$;; $4x=-12-2z$;; $\underline{x=-3-\frac{1}{2}k} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=-3-\frac{1}{2}k \\ y=-2-\frac{1}{2}k \\ z=k \end{cases}}$

Los vectores directores de las rectas r y s pueden ser, respectivamente los siguientes: $\overrightarrow{u}=(2,\ 3,\ 2)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ -2)$.

Por ser los vectores directores linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso tomamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen el punto de la recta r, A(2, 1, 0) y como extremo el punto de la recta s, B(-3, -2, 0):

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B-A = (-3,\ -2,\ 0)-(2,\ 1,\ 0) = \underline{(-5,\ -3,\ 0) = \overrightarrow{w}}.$$

El rango que forman los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es el siguiente:

$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6+30+10-12 = 40-18 = 22 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango=3}$$

Por tener los vectores rango 3 están situados en distintos planos lo cual significa que <u>las rectas r y s se cruzan.</u>

b)

Para obtener la ecuación del plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r, tomamos como vectores directores del plano los vectores directores de las rectas y como punto, un punto de s, que puede ser B(-3, -2, 0):

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;$$

$$-6(x+3)+2z+2(y+2)-3z-2(x+3)+4(y+2)=0\ \ ;;$$

$$-8(x+3)+6(y+2)-z=0\ \ ;;\ -8x-24+6y+12-z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 8x-6y+z+12=0}}$$

****

3º) Encontrar razonadamente el punto de la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente.

La tangente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

La derivada de la función es: $y'=\frac{-1\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

La pendiente (derivada de la función) es máxima cuando su derivada (segunda derivada) es cero:

$$y''=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2-(-2x)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6x^2-2=0\ ;;\ 3x^2=1\ ;;\ x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=+\frac{1}{\sqrt{3}}}\ ;;\ \underline{x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Para justificar que se trata de un máximo hemos de calcular la tercera derivada:

$$y''=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}\ ;;\ y'''=\frac{12x\cdot\left(1+x^2\right)^3-\left(6x^2-2\right)\cdot 3\left(1+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=$$

$$=\frac{12x\cdot\left(1+x^2\right)-6x\left(6x^2-2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{12x+12x^3-36x^3+12x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-24x^3+24x}{\left(1+x^2\right)^4}=\underline{\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=y'''}$$

$$y'''=\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}\Rightarrow\begin{cases} y'''_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{24\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{+}=\dfrac{+}{+}>0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Mínimo}} \\ y'''_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{-24\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{+}=\dfrac{-}{+}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo}} \end{cases}$$

El valor de la máxima pendiente es:

$$m=y'_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{3+1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}}=\frac{18}{16\sqrt{3}}=\frac{9}{8\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{8}=m}}$$

****

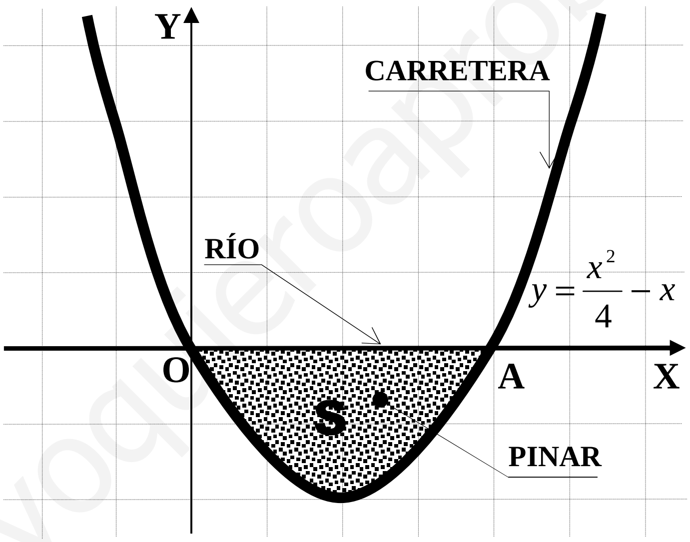
4º-1) En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

Los puntos de corte de la parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$ con los ejes son:

Eje OX: $x = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$

Eje OY: $y = 0\ ;;\ \frac{x^2}{4} - x = 0\ ;;\ x^2 - 4x = 0\ ;;\ x(x-4) = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)}\ y\ \underline{A(4,\ 0)}$

La situación aproximada de la situación es la que indica la siguiente figura:



El área del pinar es:

$$S = \int_4^0 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_4^0 = 0 - \left(\frac{64}{12} - \frac{16}{2} \right) = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{24-16}{3} = \underline{\frac{8}{3}\ Km^2 = S}$$

El precio del pinar es:

$$P = S(Ha) \cdot 60 = \left(\frac{8}{3} \cdot 100 \right) Ha \cdot 60 = 800 \cdot 200 = \underline{\underline{16000\ euros = \text{Precio}}}$$

****

4º-2) La media de las calificaciones globales obtenidas por 10 alumnos fue 6'8 puntos y sus horas de estudio totales sumaron 120. Si x representa las horas de estudio de cada estudiante e y su calificación, el coeficiente de correlación entre x e y es 0'8. Sabiendo que la desviación típica de x coincide con la desviación típica de y, explicar, razonadamente, cómo se obtiene la recta de regresión de y sobre x y calcularla.

La recta de regresión de y sobre x viene dada por la fórmula: $y-\overline{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\left(x-\overline{x}\right)$, donde $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son las medias aritméticas respectivas; σ_{xy} es la covarianza y σ_x es la desviación típica de x.

El coeficiente de variación viene dado por la fórmula: $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

Según los datos del problema, r = 0'8 y las desviaciones típicas son iguales, por lo tanto: $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=0'8$.

Sabiendo que $\overline{y}=6'8$ y que $\sum_{i=1}^{i=10} x_i=120$: $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{i=10} x_i}{N}=\frac{120}{10}=\underline{12=\overline{x}}$.

Finalmente la recta de regresión resulta:

$y-6'8=0'8\left(x-12\right)$;; $10y-68=8x-96$;; $8x-10y-28=0$;; $\underline{\underline{4x-5y-14=0}}$

****

EJERCICIO B

1º) Determinar el valor real de x para que se cumpla la siguiente propiedad: el determinante de la matriz 2B es 160, siendo $B=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|B|=\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix}=4x+(x+1)(2-x^2)+6x-4x-2x(2-x^2)-3(x+1)=$$

$$=2x-x^3+2-x^2+6x-4x+2x^3-3x-3=\underline{x^3-x^2+x-1=|B|}$$

Teniendo en cuenta que B es una matriz cuadrada de 3 x 3, el valor del determinante de 2B es $2^3 = 8$ veces mayor que el determinante de B, por lo cual:

$$|B|=x^3-x^2+x-1=\frac{160}{8}=20\ \ ;;\ \ \underline{x^3-x^2+x-21=0}.$$

Resolviendo por Ruffini, teniendo en cuenta que las raíces son los divisores del término independiente, o sea, ±1, ±3, ±7. Teniendo en cuenta que ±1 no se cumple:

	1	-1	1	21
3		3	6	-21
	1	2	7	$\boxed{0}$
-7		-7	35	
	1	-5	$\boxed{\neq 0}$	

$$\underline{\underline{x=3}}$$

****

2º) Se considera la recta $r \equiv (x,\ y,\ z) = (t+1,\ 2t,\ 3t)$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 0$ y el punto P(1, 1, 1). Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por P.

c) Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta s intersección de π_1 y π_2.

----

a)

La expresión por su ecuación general del plano π_1 es: $\pi_1 \equiv x - 2y - z + D = 0$.

Por contener al punto P(1, 1, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$1 - 2 \cdot 1 - 1 + D = 0\ \ ;;\ \ 1 - 2 - 1 + D = 0\ \ ;;\ \ -2 + D = 0\ \ ;;\ \ D = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv x - 2y - z + 2 = 0}}$$

b)

Una forma de resolver este apartado es la siguiente:

Dos puntos de la recta r son: $r \equiv (x,\ y,\ z) = (t+1,\ 2t,\ 3t) \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \underline{A(1,\ 0,\ 0)} \\ t = 1 \rightarrow \underline{B(2,\ 2,\ 3)} \end{cases}$

Un vector director de la recta r es: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3)$.

El otro vector director necesario del plano π_2 es: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (0,\ 1,\ 1)$.

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 3(x-1) + (y-1) - (z-1) - 2(x-1) = 0\ \ ;;$$

$$(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0\ \ ;;\ \ x - 1 + y - 1 - z + 1 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y - z - 1 = 0}}$$

c)

La recta s intersección de π_1 y π_2 es: $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas se obtienen parametrizando una variable, por ejemplo z:

$$s \equiv \begin{cases} x-2y-z+2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-2+z \\ x+y=1+z \end{cases} \;;\; \begin{cases} -x+2y=2-z \\ \quad x+y=1+z \end{cases} \Rightarrow 3y=3 \;;\; \underline{y=1}$$

$$x+y=1+z \;;\; x+1=1+k \;;\; \underline{x=k} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=k \\ y=1 \\ z=k \end{cases}}}$$

****

3º) Hallar todos los valores reales de z tales que $\displaystyle\int_0^2 \frac{-16}{x^2-2x-15}\cdot dx = L\,25$.

En primer lugar vamos a resolver la integral indefinida $\displaystyle I=\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\cdot dx$:

$$x^2-2x-15=0\ ;;\ x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=5}\\ \underline{x_2=-3}\end{cases}.$$

$$\frac{-16}{x^2-2x-15}=\frac{-16}{(x-5)(x+3)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx-5B}{x^2-2x-15}=\frac{(A+B)x+(3A-5B)}{x^2-2x-15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A+B=0\\ 3A-5B=-16\end{matrix}\right\}\ ;;\ \left\{\begin{matrix}-3A-3B=0\\ 3A-5B=-16\end{matrix}\right\}\to -8B=-16\ ;;\ \underline{B=2}\ ;;\ A+2=0\ ;;\ \underline{A=-2}$$

$$I=\int\frac{-16}{x^2-2x-15}\cdot dx=\int\frac{-2}{x-5}\cdot dx+\int\frac{2}{x+3}\cdot dx=\underline{-2L\left|x-5\right|+2L\left|x+3\right|=I}$$

Sustituyendo en el enunciado el valor obtenido de I, resulta:

$$\int_0^2\frac{-16}{x^2-2x-15}\cdot dx=L\,25\ ;;\ \Big[-2L\left|x-5\right|+2L\left|x+3\right|\Big]_0^z=L\,25\ ;;\ \left[2L\left|\frac{x+3}{x-5}\right|\right]_0^z=2L5\ ;;$$

$$2L\frac{z+3}{z-5}-2L\frac{3}{-5}=L\,25\ ;;\ 2L\frac{\frac{z+3}{z-5}}{\frac{3}{-5}}=L\,25\ ;;\ 2L\left(-\frac{5}{3}\,\frac{z+3}{z-5}\right)=L\,25\ ;;\ L\left(-\frac{5}{3}\,\frac{z+3}{z-5}\right)^2=L\,5^2\ ;;$$

$$\frac{25}{9}\cdot\left(\frac{z+3}{5-z}\right)^2=25\ ;;\ (z+3)^2=9(5-z)^2\ ;;\ z^2+6z+9=9\left(25-10z+z^2\right)=225-90z+9z^2\ ;;$$

$$8z^2-96z+216=0\ ;;\ \underline{z^2-12z+27=0}$$

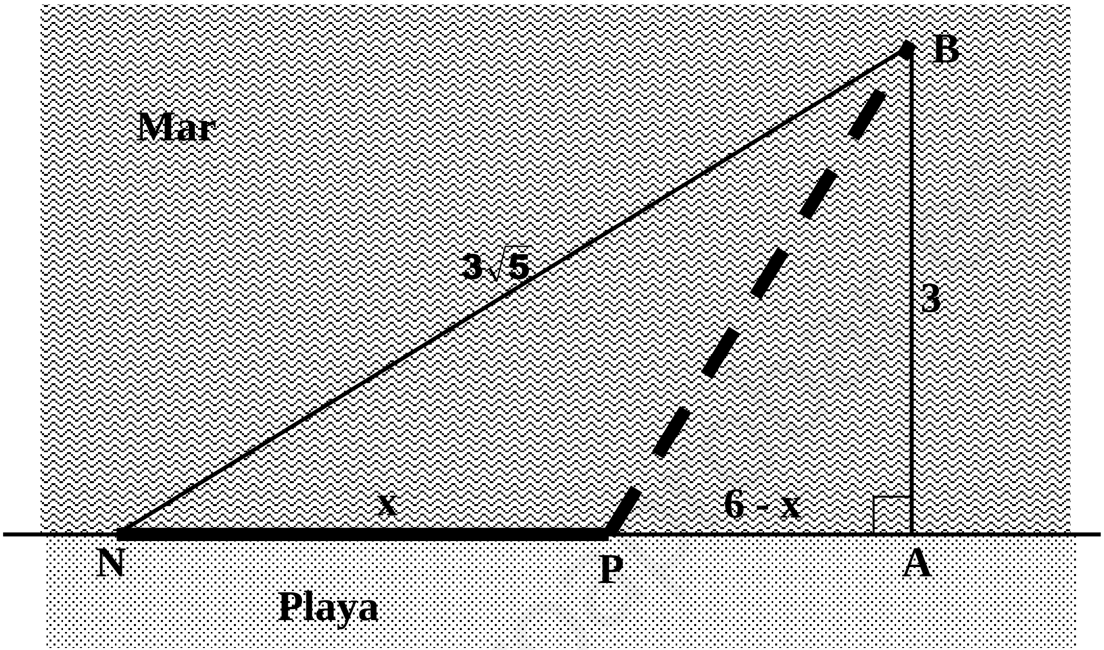
$$z=\frac{12\pm\sqrt{144-108}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{12\pm 6}{2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=9\\ z_2=3\end{cases}$$

<u>Los valores reales de z son 3 y 9</u>

****

4º-1) Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 Km/h y nadando, de 3 Km/h, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta alcanzar el mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

La situación aproximada se refleja en el siguiente esquema:



Recorrido andando

Recorrido nadando

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + \overline{NA}^2 \ ;; \ 45 = 9 + \overline{NA}^2 \ ;; \ \overline{NA} = \sqrt{45-9} = \sqrt{36} = \underline{6 \ Km = \overline{NA}}.$$

$$\overline{PB}^2 = (6-x)^2 + 3^2 = 36 - 12x + x^2 + 9 = x^2 - 12x + 45 \ ;; \ \underline{\overline{PB} = \sqrt{x^2 - 12x + 45}}.$$

El tiempo total es el siguiente: $T = \frac{x}{5} + \frac{\overline{PB}}{3} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}{3}$.

$$T' = \frac{1}{5} + \frac{2x - 12}{6\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = 0 \ ;; \ \frac{1}{5} = \frac{12 - 2x}{6\sqrt{x^2 - 12x + 45}} \ ;; \ 5(6 - x) = 3\sqrt{x^2 - 12x + 45} \ ;;$$

$$25\left(36 - 12x + x^2\right) = 9\left(x^2 - 12x + 45\right) \ ;; \ 900 - 300x + 25x^2 = 9x^2 - 108x + 405 \ ;;$$

$$16x^2 - 192x + 495 = 0 \ ;; \ x = \frac{192 \pm \sqrt{36864 - 31680}}{32} = \frac{192 \pm 72}{32} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{264}{32} = \frac{33}{4} = 8'25 \\ \underline{x_2 = \frac{120}{32} = \frac{15}{4} = 3'75} \end{cases}$$

La solución de x es 3’75 Km.

(No es posible la solución x = 8’25 por ser $\overline{NA} = 6$.)

Con los valores obtenidos se tiene:

$$Tiempo\ caminando = \frac{x}{5} = \frac{\frac{15}{4}}{5} = \frac{3}{4}\ hora = \underline{45\ minutos}.$$

El tiempo que debe caminar antes de lanzarse al mar es de 45 minutos.

El tiempo total del recorrido es el siguiente:

$$\overline{PB} = \sqrt{x^2 - 12x + 45} \Rightarrow \overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 12 \cdot \frac{15}{4} + 45} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \underline{\frac{15}{4}\ Km = \overline{PB}}.$$

$$T = \frac{x}{5} + \frac{\overline{PB}}{3} = \frac{\frac{15}{4}}{5} + \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2\ horas = T}}$$

****

4º-2) La estatura de una población se distribuye normalmente con media 1’70 metros y desviación típica 0’1 metros.

a) Se selecciona una persona al azar. Explicar razonadamente cómo se obtiene la probabilidad de que su estatura sea menor que 1’72 metros y calcular dicha probabilidad.

b) Se seleccionan a azar tres personas. Obtener razonadamente la probabilidad de que sólo una de ellas mida más de 1’72 metros.

----

a)

Para resolver este apartado es necesario utilizar las tablas de la distribución normal, para lo cual se necesita tipificar la variable x mediante la fórmula: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

En el caso que nos ocupa: X = 1’72; μ = 1’70 y σ = 0’1, con lo cual resulta:

$$Z = \frac{1'72 - 1'70}{0'1} = \frac{0'02}{0'1} = 0'2 .$$

La probabilidad de que la estatura de una persona elegida al azar sea menor que 1’72 es, según la tabla:

$$\underline{\underline{p(X \leq 1'72) = p(Z \leq 0'2) = 0'5793 = 57'93\ \%}}$$

b)

Este apartado lo podemos considerar como una distribución binomial cuyos parámetros son los siguientes: n = 3; p = 0’4207; q = 1 – p = 0’5793, siendo n el número de personas elegidas; p la probabilidad de que la persona elegida mida más de 1’72 y q la probabilidad de que la persona elegida mida menos de 1’72.

$$p(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0'4207^1 \cdot 0'5793^2 = 3 \cdot 0'4207 \cdot 0'3356 = \underline{\underline{0'4235 = 42'35\ \% = p}}$$

****