

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****SEPTIEMBRE – 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen, teniéndose que hacer 2 de los 3 primeros ejercicios del repertorio elegido.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

REPERTORIO A

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcular

razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $(A \cdot B' + C)X = (A' \cdot D)E$,

donde M' significa la matriz transpuesta de la matriz M.

$$(A \cdot B' + C)X = (A' \cdot D)E \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (7 \quad 2 \quad -2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[(1 \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ;;$$

$$\left[\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0+4+6) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ;; \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (10) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ;;$$

$$\left. \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 2y - 2z = 20 \\ 14x + 5y - 4z = 50 \\ 21x + 6y - 5z = 30 \end{cases} \text{ Resolviendo por Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 2 & -2 \\ 50 & 5 & -4 \\ 30 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{10 \cdot (-50 - 60 - 24 + 30 + 48 + 50)}{7 \cdot (-25 - 24 - 24 + 30 + 24 + 20)} =$$

$$= \frac{10 \cdot (-134 + 128)}{7 \cdot (-73 + 74)} = \frac{10 \cdot (-6)}{7 \cdot 1} = \underline{\underline{-\frac{60}{7}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 20 & -2 \\ 14 & 50 & -4 \\ 21 & 30 & -5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-70 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{7} = -10 \cdot (25 + 12 + 24 - 30 - 12 - 20) = \underline{\underline{10}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 20 \\ 14 & 5 & 50 \\ 21 & 6 & 30 \end{vmatrix}}{7} = \frac{70 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{7} = 10 \cdot (15 + 24 + 30 - 30 - 30 - 12) = \underline{\underline{-30}} = z$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix} = -\frac{10}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}}}$$

2º) Un paralelepípedo rectangular (ortopedro) tiene tres de sus aristas sobre las siguientes rectas: $l \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $m \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $n \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, y uno de sus vértices es el punto $P(12, 21, -11)$.

Se pide: a) Hallar los vértices restantes.

b) Calcular su volumen.

a)

Las ecuaciones paramétricas de las tres rectas son:

$$l \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad ;; \quad m \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = \lambda \Rightarrow m \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} ;;$$

$$n \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{y}{2} \Rightarrow n \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas pueden los siguientes: $\begin{cases} \vec{v}_l = (0, 0, 1) \\ \vec{v}_m = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_n = (1, -2, 0) \end{cases}$.

Las tres rectas son perpendiculares entre sí (los productos escalares de los vectores directores son todos nulos) y todas pasan por el origen de coordenadas, lo cual significa que el ortopedro tiene las aristas paralelas a los ejes coordenados y uno de sus vértices es el origen $O(0, 0, 0)$.

El punto dado P, no pertenece a ninguno de los tres planos que determinan las tres rectas, tomadas dos a dos, por lo cual podemos asegurar que es el vértice opuesto al origen de coordenadas.

Como se aprecia, la recta l coincide con el eje OZ, por lo cual las coordenadas del vértice A son $A(0, 0, -11)$ y las de su vértice opuesto $D(12, 21, -11)$.

La recta r que pasa por D y es paralela a n tiene por ecuación:

$r \equiv (x, y, z) = (12, 21, 0) + \lambda(1, -2, 0)$, cuya expresión general es la siguiente:

$$\frac{x-12}{1} = \frac{y-21}{-2} \Rightarrow -2x+24 = y-21 \quad ;; \quad r \equiv 2x + y - 45 = 0$$

El punto B es la intersección de las rectas r y m:

$$r \equiv 2x + y - 45 = 0$$

$$m \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y \Rightarrow 4y + y - 45 = 0 \ ; \ ; \ 5y = 45 \ ; \ ; \ y = 9 \ ; \ ; \ x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B(18, 9, 0)}}$$

La recta s que pasa por D y es paralela a n es:

$s \equiv (x, y, z) = (12, 21, 0) + \lambda(2, 1, 0)$, cuya expresión general es la siguiente:

$$\frac{x-12}{2} = \frac{y-21}{1} \Rightarrow x-12 = 2y-42 \ ; \ ; \ \underline{\underline{s \equiv x-2y+30=0}}$$

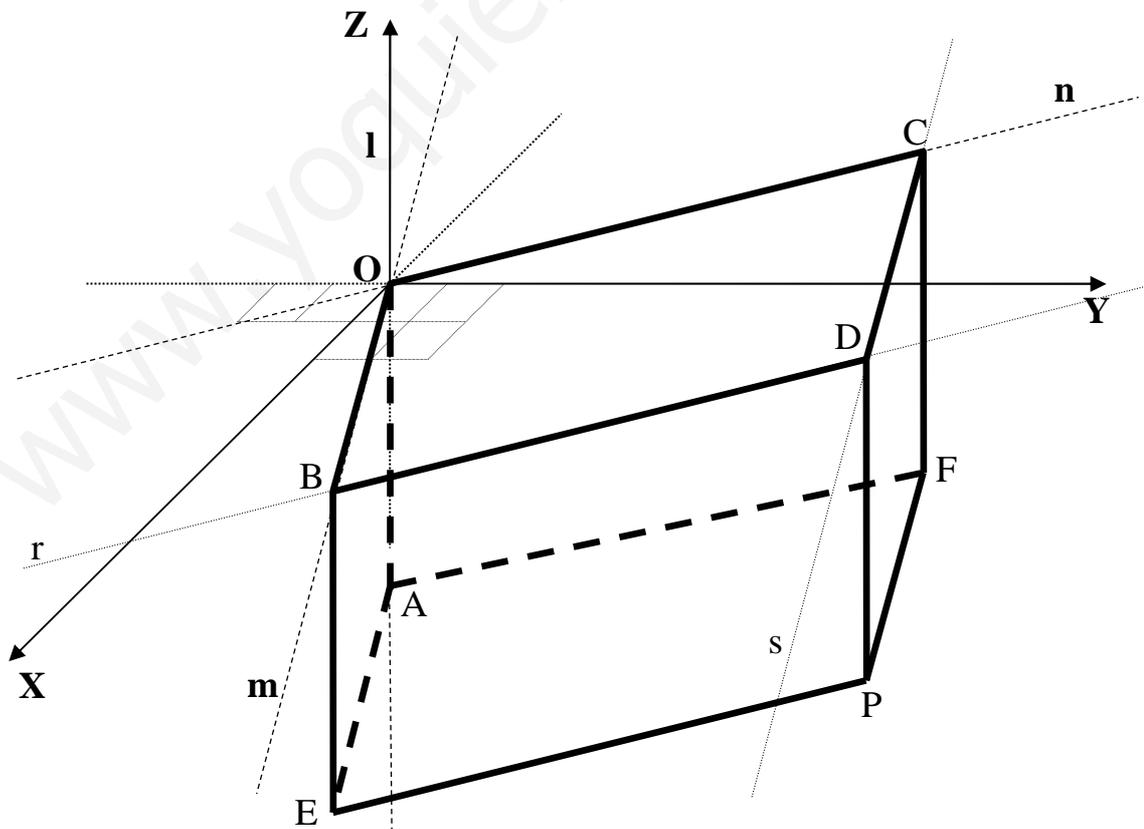
El punto C es la intersección de las rectas s y n :

$$s \equiv x - 2y + 30 = 0$$

$$n \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x \Rightarrow x + 4x + 30 = 0 \ ; \ ; \ 5x = -30 \ ; \ ; \ x = -6 \ ; \ ; \ y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C(-6, 12, 0)}}$$

Con objeto de facilitar la comprensión hacemos un gráfico muy aproximado de la situación.



De la observación del dibujo se deducen: $E(18, 9, -11)$ y $F(-6, 12, -11)$.

b)

Sabiendo que el volumen de un ortoedro es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan, es $V = [\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})]$.

$$\vec{OA} = (0, 0, -11) \ ; \ ; \ \vec{OB} = (18, 9, 0) \ \text{y} \ \vec{OC} = (-6, 12, 0).$$

$$V = [\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 \\ 18 & 9 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = |-11 \cdot 9 \cdot 6| = \underline{\underline{594 \text{ u}^3}} = V$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) a) El perímetro de un sector circular de radio r es 4 metros. ¿Cuántos radianes debe medir su ángulo central α para que su área sea máxima?

Nota: Perímetro: $p = 2r + r\alpha$. Área: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

b) El área de otro sector circular es $S = 1 \text{ m}^2$. ¿Para qué radio es mínimo el perímetro?

a)

$$p = 2r + r\alpha. \quad ; ; \quad 4 = 2r + r\alpha \quad ; ; \quad \alpha = \frac{4-2r}{r} = \frac{2(2-r)}{r} = \alpha$$

Sustituyendo este valor en la fórmula del área, resulta:

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2-r)}{r} \cdot r^2 = (2-r) \cdot r = \underline{2r - r^2 = S}$$

Para que el área sea máxima es necesario que su derivada sea cero:

$$S'(r) = 2 - 2r \quad ; ; \quad S'(r) = 0 \Rightarrow 2 - 2r = 0 \quad ; ; \quad \underline{r = 1}$$

Para justificar que se trata de un máximo tendremos en cuenta que:

$$S''(r) = -2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{máximo, c.q.j.}}$$

El valor del perímetro se obtiene sustituyendo el valor de r por su valor, 1:

$$\alpha = \frac{4-2r}{r} = \frac{4-2 \cdot 1}{1} = \frac{4-2}{1} = \underline{\underline{2 \text{ radianes} = \alpha}}$$

b)

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2}\alpha r^2 = 1 \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{2}{r^2}}$$

Sustituyendo el valor de α en la fórmula del perímetro:

$$p = 2r + r\alpha = 2r + r \cdot \frac{2}{r^2} = 2r + \frac{2}{r} = \frac{2r^2 + 2}{r} = \underline{\frac{2(r^2 + 1)}{r} = p}$$

Para que el perímetro sea mínimo es necesario que su derivada sea cero:

$$p'(r) = \frac{4r \cdot r - (2r^2 + 2) \cdot 1}{r^2} = \frac{4r^2 - 2r^2 - 2}{r^2} = \frac{2r^2 - 2}{r^2} = \underline{\frac{2(r^2 - 1)}{r^2} = p'(r)}.$$

$$p'(r) = 0 \Rightarrow \frac{2(r^2 - 1)}{r^2} = 0 \quad ; ; \quad r^2 - 1 = 0 \quad ; ; \quad r = \pm 1 \rightarrow \underline{r = 1}$$

Para justificar que se trata de un máximo tendremos en cuenta que:

$$p''(r) = \frac{4r \cdot r^2 - (2r^2 - 2) \cdot 2r}{r^4} = \frac{4r^2 - 2(2r^2 - 2)}{r^3} = \frac{4r^2 - 4r^2 + 4}{r^3} = \frac{4}{r^2} = p''(r)$$

$$p''(1) = \frac{4}{1^2} = \frac{4}{1} = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{mínimo, c.q.j.}}$$

El valor del ángulo α se obtiene sustituyendo el valor de r por su valor, 1:

$$\alpha = \frac{4 - 2 \cdot 1}{1} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ radián} = \alpha$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del perímetro queda, finalmente.

$$p = 2r + r\alpha = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = \underline{4 \text{ metros} = p}$$

El perímetro es mínimo cuando el radio es de un metro.

4º) El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tuberías de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0'5 % menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto al previsto.

Llamando C al caudal que circula por la tubería y r al radio de la misma, sería, según el enunciado del problema: $C = k \cdot r^4$.

Si el radio disminuye en un 5 % de su valor, el nuevo radio es:

$$r_1 = r - 0'5 \% \text{ de } r = r - \frac{0'5}{100} \cdot r = r \left(1 - \frac{5}{1000} \right) = r \left(1 - \frac{1}{200} \right) = r \cdot \frac{200-1}{200} = \underline{\underline{\frac{199}{200} r = r_1}}$$

El valor de la diferencia (diferencial) del radio es:

$$dr = r - r_1 = r - \frac{199}{200} r = r \left(1 - \frac{199}{200} \right) = r \cdot \frac{200-199}{200} = \underline{\underline{\frac{1}{200} r = dr}}$$

La variación o diferencia de caudal será: $dC = kr^4 - k r_1^4 = k(r^4 - r_1^4)$.

Teniendo en cuenta que una expresión de la derivada es: $C'(r) = \frac{dC}{dr}$.

Despejando de la expresión anterior el valor pedido, será:

$$dC = C'(r) \cdot dr = (4k r^3) \cdot dr = 4k r^3 \cdot \frac{1}{200} r = \frac{kr^4}{50} = \frac{C}{50} = C \cdot 0'02 = \underline{\underline{2 \% \text{ de } C = dC}}$$

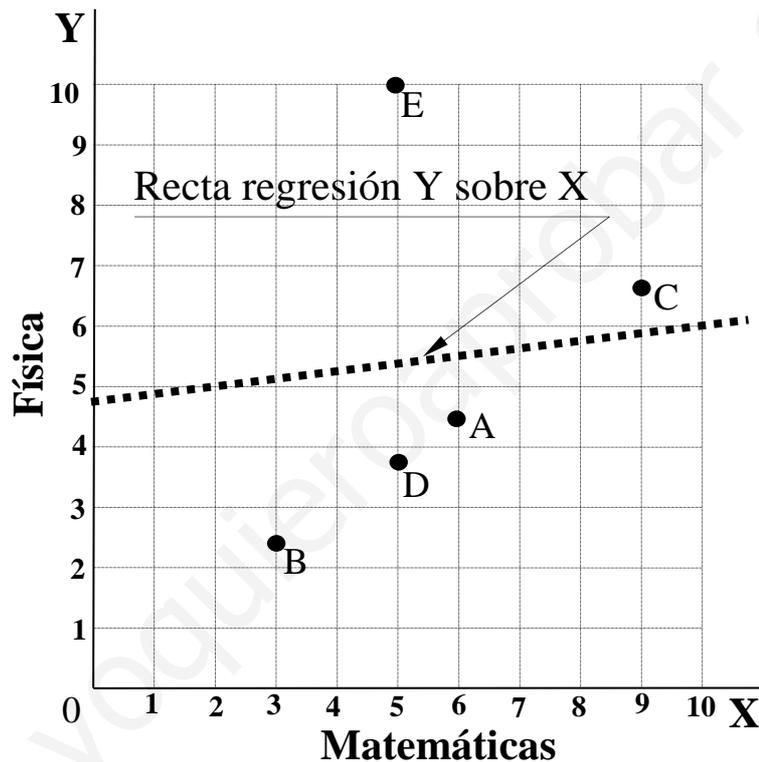
El caudal disminuye en un 2 %.

5º) Las coordenadas x e y de los puntos $A(6, 4'5)$, $B(3, 2'4)$, $C(9, 6'6)$, $D(5, 3'8)$ y $E(5, 10)$ son las calificaciones de cinco alumnos en Matemáticas y Física.

a) Representar los 5 puntos en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de Y sobre X y deducir razonadamente a cuál de los números -1 , $0'5$ o $0'5$ está más próximo el coeficiente de correlación.

b) Calcular el coeficiente de correlación de los cuatro primeros alumnos, explicando el resultado obtenido e interpretándolo gráficamente.

a)



La recta de regresión de Y sobre X viene dada por: $y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$, donde \bar{x} e \bar{y} son las medias aritméticas de las notas de matemáticas y física, respectivamente; S_{xy} es la covarianza y S_x es la desviación típica de las notas de matemáticas.

$$\bar{x} = \frac{6+3+9+5+5}{5} = \frac{28}{5} = 5'60 = \bar{x} \quad ; ; \quad \bar{y} = \frac{4'5+2'4+6'6+3'8+10}{5} = \frac{27'3}{5} = 5'46 = \bar{y}$$

$$S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{6 \cdot 4'5 + 3 \cdot 2'4 + 9 \cdot 6'6 + 5 \cdot 3'8 + 5 \cdot 10}{5} - 5'60 \cdot 5'46 =$$

$$= \frac{27 + 7'2 + 59'4 + 19 + 50}{5} - 30'576 = \frac{162'6}{5} - 30'576 = 32'40 - 30'576 = 1'824 = S_{xy}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{6^2 + 3^2 + 9^2 + 5^2 + 5^2}{5} - 5'60^2 = \frac{36 + 9 + 81 + 25 + 25}{5} - 31'36 =$$

$$= \frac{176}{5} - 31'36 = 35'2 - 31'36 = \underline{3'84} = S_x^2$$

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5'46 = \frac{1'824}{3'84} (x - 5'60) \quad ; ; \quad 3'84y - 20'97 = 0'475(x - 5'60) \quad ; ;$$

$$3'84y - 20'97 = 0'475x - 2'66 \quad ; ; \quad 0'475x - 3'84y + 18'31 = 0 \approx \underline{\underline{r \equiv x - 8y + 38 = 0}}$$

Con objeto de representar la recta anterior en el gráfico, obtenemos dos puntos dando a x dos valores adecuado, como son $x = 2$ y $x = 10$:

$$r \equiv y = \frac{x + 38}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = \frac{2 + 38}{8} = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow \underline{A(2, 5)} \\ x = 10 \rightarrow y = \frac{10 + 38}{8} = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow \underline{B(10, 6)} \end{cases}$$

El coeficiente de correlación lineal es $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{3'84} = \underline{1'96} = S_x$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{4'5^2 + 2'4^2 + 6'6^2 + 3'8^2 + 10^2}{5} - 5'46^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20'25 + 5'76 + 43'56 + 14'44 + 100}{5} - 29'81} = \sqrt{\frac{184'01}{5} - 29'81} = \sqrt{36'80 - 29'81} =$$

$$= \sqrt{6'99} = \underline{2'64} = S_y$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{1'824}{1'96 \cdot 2'64} = \frac{1'82}{5'17} = \underline{0'35} = r$$

Aunque no se pedía, se han realizado los cálculos con precisión.

b)

El coeficiente de correlación de los cuatro primero elementos sería el siguiente:

$$\bar{x} = \frac{6 + 3 + 9 + 5}{4} = \frac{23}{4} = \underline{5'725} = \bar{x} \quad ; ; \quad \bar{y} = \frac{4'5 + 2'4 + 6'6 + 3'8}{4} = \frac{17'3}{4} = \underline{4'325} = \bar{y}$$

$$S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{6 \cdot 4'5 + 3 \cdot 2'4 + 9 \cdot 6'6 + 5 \cdot 3'8}{4} - 5'725 \cdot 4'325 =$$

$$= \frac{27 + 7'2 + 59'4 + 19}{4} - 24'76 = \frac{112'6}{4} - 24'76 = 28'15 - 24'76 = \underline{3'39} = S_{xy}$$

El coeficiente de correlación lineal es $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{6^2 + 3^2 + 9^2 + 5^2}{4} - 5'725^2} = \sqrt{\frac{36 + 9 + 81 + 25}{4} - 32'78} =$$

$$= \sqrt{\frac{151}{4} - 32'78} = \sqrt{37'75 - 32'78} = \sqrt{4'97} = \underline{2'23} = S_x$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{4'5^2 + 2'4^2 + 6'6^2 + 3'8^2}{5} - 4'325^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20'25 + 5'76 + 43'56 + 14'44}{4} - 18'71} = \sqrt{\frac{84'01}{4} - 18'71} = \sqrt{21'00 - 18'71} =$$

$$= \sqrt{2'29} = \underline{1'51} = S_y$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{3'39}{2'23 \cdot 1'51} = \frac{3'29}{3'38} = \underline{0'97} = r$$

Al estar próximo a 1 el coeficiente de correlación podemos afirmar que la correlación lineal es casi perfecta, o sea, que la dependencia es de tipo funcional, la nube de puntos se aproxima de forma casi perfecta a la recta de regresión.

EJERCICIO B

1º) En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migado: 600 gr de carne, 300 gr de pescado y 100 gr de verdura.

- Alimento Catomeal: 300 gr de carne, 400 gr de pescado y 300 gr de verdura.

- Alimento Comecat: 200 gr de carne, 600 gr de pescado y 200 gr de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 gr de carne, 370 gr de pescado y 160 gr de verdura por kilo de alimento. ¿Qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Llamando x , y , z a la cantidad de mezcla de Migado, Catomeal y Comecat, respectivamente, se puede expresar la siguiente relación:

$$\left. \begin{array}{l} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 300x + 400y + 600z = 370 \\ 100x + 300y + 200z = 160 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 60x + 30y + 20z = 47 \\ 30x + 40y + 60z = 37 \\ 10x + 30y + 20z = 16 \end{array} \right\} \text{Restando a la primera la tercera:}$$

$$50x = 31 \quad ; \quad x = \frac{31}{50} = 0'62 = x$$

$$\left. \begin{array}{l} 30 \cdot 0'62 + 40y + 60z = 37 \\ 10 \cdot 0'62 + 30y + 20z = 16 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 40y + 60z = 18'4 \\ 30y + 20z = 9'8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 40y + 60z = 18'4 \\ -90y - 60z = -29'4 \end{array} \right\} \Rightarrow -50y = -11 \quad ;$$

$$y = \frac{11}{50} = 0'22 = y$$

$$10x + 30y + 20z = 16 \quad ; \quad x + 3y + 2z = 1'6 \quad ; \quad 0'62 + 3 \cdot 0'22 + 2z = 1'6 \quad ; \quad 0'62 + 0'66 + 2z = 1'6$$

$$2z + 1'28 = 1'6 \quad ; \quad 2z = 1'6 - 1'28 \quad ; \quad 2z = 0'32 \quad ; \quad z = 0'16$$

El porcentaje es del 62 %, 22 % y 16 % de Migado, Catomeal y Comecat, respectivamente.

2º) Dados los planos $\pi \equiv 5x - y - z = 0$ y $\sigma \equiv x + y - z = 0$ y el punto $P(9, 4, -1)$, determinar:

a) La ecuación del plano π_1 que pasa por P y es perpendicular a los planos π y σ .

b) El punto P' simétrico de P con respecto a la recta r, intersección de los planos π y σ .

a)

El plano π_1 pedido tiene como vectores directores a los vectores normales a los planos π y σ : $\vec{n}_\pi = (5, -1, -1)$ y $\vec{n}_\sigma = (1, 1, -1)$, por lo tanto se puede definir como:

$$\pi_1(P; \vec{n}_\pi, \vec{n}_\sigma) \equiv \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z+1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$(x-9) + 5(z+1) - (y-4) + (z+1) + (x-9) + 5(y-4) = 0 \;;$$

$$2(x-9) + 4(y-4) + 6(z+1) = 0 \;; \quad (x-9) + 2(y-4) + 3(z+1) = 0 \;;$$

$$x - 9 + 2y - 8 + 3z + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 14 = 0}}$$

b)

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente y un vector director de la misma son los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} \pi \equiv 5x - y - z = 0 \\ \sigma \equiv x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 5\lambda \\ y - z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 4\lambda \;; \; \underline{y = 2\lambda}$$

$$y - z = -\lambda \;; \; z = y + \lambda = \lambda + 2\lambda \;; \; \underline{z = 3\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π_1 es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 4\lambda + 9\lambda - 14 = 0 \;; \; 14\lambda - 14 = 0 \;; \; \lambda = 1 \Rightarrow \underline{N(1, 2, 3)}$$

Para que N sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \quad ;; (1, 2, 3) - (9, 4, -1) = (x, y, z) - (1, 2, 3) ;;$$

$$(-8, -2, 4) = (x-1, y-2, z-3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = -8 \rightarrow \underline{x = -7} \\ y-2 = -2 \rightarrow \underline{y = 0} \\ z-3 = 4 \rightarrow \underline{z = 7} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(-7, 0, 7)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por $P(2, 3)$ y son tangentes a dicha curva.

El haz de rectas que pasan por el punto $P(2, 3)$ es:

$$y - 3 = m(x - 2) \quad ; ; \quad \underline{y = mx - 2m + 3}$$

Si las rectas son tangentes a la curva, necesariamente tienen un solo punto en común, lo cual significa que el discriminante de la ecuación de segundo grado resultante tiene que ser cero.

El sistema que forman la tangente y la curva es: $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = mx - 2m + 3 \end{cases}$

Resolviendo: $x^2 + 2x - 1 = mx - 2m + 3 \quad ; ; \quad x^2 + (2 - m)x + (2m - 4) = 0$.

$$x = \frac{m - 2 \pm \sqrt{(2 - m)^2 - 4 \cdot (2m - 4)}}{2} \Rightarrow (2 - m)^2 - 4 \cdot (2m - 4) = 0 \quad ; ; \quad (2 - m)^2 = 4(2m - 4) \quad ; ;$$

$$4 - 4m + m^2 = 8m - 16 \quad ; ; \quad \underline{m^2 - 12m + 20 = 0}$$

$$m = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 10 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

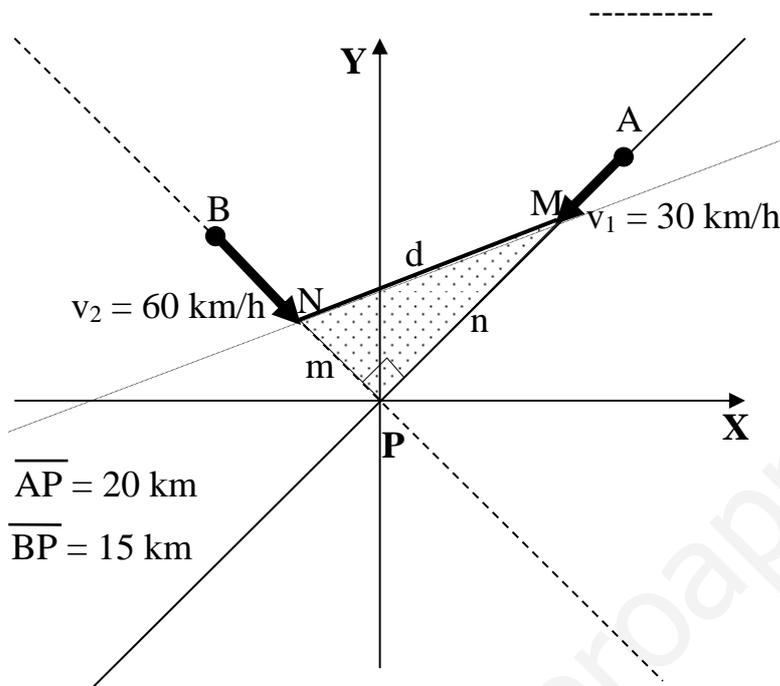
Las ecuaciones de las rectas son:

$$t_1 \equiv y - 3 = 10(x - 2) \quad ; ; \quad y - 3 = 10x - 20 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 \equiv 10x - y - 17 = 0}}$$

$$t_2 \equiv y - 3 = 2(x - 2) \quad ; ; \quad y - 3 = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_2 \equiv 2x - y - 1 = 0}}$$

4º) El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y = x$ e $y = -x$. Dos lanchas motoras A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P donde confluyen. La lancha A se dirige a P con velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a P con una velocidad de 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

- La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician el recorrido.
- La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas.



a) Después de un tiempo de t horas las lanchas A y B se encuentran situadas en los puntos M y N, respectivamente.

Los valores de los lados m y n del triángulo rectángulo de vértices AMP son, según las velocidades de cada lancha, los siguientes:

$$n = 20 - 30t \quad ; \quad m = 15 - 60t .$$

La distancia d entre ambos en ese instante es la hipotenusa del triángulo rectángulo, que es la función pedida con respecto al tiempo.

$$d(t) = \sqrt{(20 - 30t)^2 + (15 - 60t)^2} = \sqrt{400 - 1200t + 900t^2 + 225 - 1800t + 3600t^2} =$$

$$= \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625} = 5 \sqrt{180t^2 - 120t + 25} = d(t)$$

b) La distancia será mínima cuando su derivada sea cero:

$$d'(t) = 5 \cdot \frac{360t - 120}{\sqrt{180t^2 - 120t + 25}} = 0 \Rightarrow 360t - 120 = 0 \quad ; \quad 3t - 1 = 0 \quad ; \quad t = \frac{1}{3} \text{ hora}$$

La distancia mínima entre las lanchas se produce a los 20 minutos del comienzo, y su valor es:

$$d\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \sqrt{180 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 120 \cdot \frac{1}{3} + 25} = 5 \sqrt{20 - 40 + 25} = 5\sqrt{5} \cong \underline{\underline{11'18 \text{ km} = d}}$$

5º) El peso de los estudiantes de una universidad se distribuye normalmente, con media aritmética de $x = 65$ kgr y desviación típica $\sigma = 1'5$ kgr. Obtener razonadamente:

a) El tanto por ciento de estudiantes con peso entre 63'5 y 68 kg.

b) La probabilidad de que al elegir al azar 3 estudiantes, dos pesen más de 68 kgr.

a)

En primer lugar tipificamos la variable (peso) X, para lo cual utilizamos la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, donde : $X = 63'5$; $\mu = 65$ y $\sigma = 1'5$, con lo cual resulta:

$$Z_1 = \frac{63'5 - 65}{1'5} = \frac{-1'5}{1'5} = -1 \quad ; \quad Z_2 = \frac{68 - 65}{1'5} = \frac{3}{1'5} = 2$$

La probabilidad de que un estudiante pese entre 63'5 y 68 kgr es:

$$\begin{aligned} p(63'5 \leq X \leq 68) &= p(-1 \leq Z \leq 2) = p(Z \leq 2) - p(Z \leq -1) = p(Z \leq 2) - p(Z > 1) = \\ &= p(Z \leq 2) - [1 - p(Z \leq 1)] = p(Z \leq 2) + p(Z \leq 1) - 1 = 0'9772 + 0'8413 - 1 = \underline{0'8185} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un estudiante pese entre 63'5 y 68 es del 82 %

b)

La probabilidad de que des de los tres estudiantes pesen más de 68 kgr es:

$$p(X > 68) = p(Z > 2) = 1 - p(Z \leq 2) = 1 - 0'9772 = \underline{0'0228}$$

La probabilidad es del 2'28 %.
