PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirá el ejercicio A o el ejercicio B, del que sólo se harán tres de los problemas propuestos. Cada problema se puntuará de 0 a 3’3.
Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria)

REPERTORIO A

1º) Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z, siguiente: $\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución (x, y, z) = (0, 0, 0).

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$.

----

a)

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de λ es:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda^2-4)(\lambda+6) + 15 + 15 - 5(\lambda+6) + 15(\lambda+2) + 3(\lambda-2) =$$

$= \lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 24 + 30 - 5\lambda - 30 + 15\lambda + 30 + 3\lambda - 6 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 6\lambda + 9\right) =$

$= \lambda(\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$;; $\underline{\lambda_2 = -3}$.

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M = 3 = n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}$$

$$\underline{\underline{(Solución\ \ única:\ x = y = z = 0)}}$$

b)

Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -3$ el sistema es compatible indeterminado; resolvemos en cada uno de los casos.

Para $\lambda = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y resolviendo el sistema restante:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{rcases} 2x - y = -\lambda \\ x + 2y = \lambda \end{rcases} \begin{rcases} 4x - 2y = -2\lambda \\ x + 2y = \lambda \end{rcases} \Rightarrow 5x = -\lambda \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{5}\lambda}$$

$$2x - y = -\lambda \ \ ;; \ \ y = 2x + \lambda = -\frac{2}{5}\lambda + \lambda = \underline{\frac{3}{5}\lambda = y} \quad (qui\tan do\ \ deno\min adores) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z = 5\lambda \end{cases}}}$$

Para $\lambda = -3$ el sistema resulta $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, y por ser las tres ecuaciones iguales, equivalente a $x + y - z = 0$.

El rango del sistema resultante es uno y, como el número de incógnitas es de tres, tiene dos grados de libertad, es decir, que tenemos que parametrizar dos incógnitas.

Haciendo $y = \lambda$; $z = \mu$, la solución es:

$$Solución: \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \quad \forall \lambda, \ \mu \in R$$

c)

Para $\lambda = -3$ el sistema es compatible indeterminado, lo que significa que los tres planos tienen puntos en común. Por ser el sistema resultante una ecuación con tres incógnitas, resulta que son tres planos coincidentes.

****

2º) En el espacio se consideran la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $\pi_1 \equiv 2x-2y-z=9$ y $\pi_2 \equiv 4x-y+z=42$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,\ 3,\ -4)$ y $B(3,\ -5,\ -2)$, se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s.

b) Justificar que las rectas r y s se cruzan.

c) Calcular un vector direccional de la recta t, perpendicular común a las rectas r y s, y calcular el punto Q de intersección de las rectas s y t.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} 2x-2y-z-9=0 \\ 4x-y+z-42=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-2y=9+\lambda \\ 4x-y=42-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2x+2y=-9-\lambda \\ 8x-2y=84-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x=75-3\lambda \;;;\; x=\frac{75}{6}-\frac{3}{6}\lambda=\underline{\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\lambda=x} \;;;\; 4x-y=42-\lambda \;;;\; y=4x-42+\lambda=$$

$$=4\cdot\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)-42+\lambda=50-2\lambda-42+\lambda=\underline{8-\lambda=y} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ y=8-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ -2)}.$$

Un vector director de s puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(3,\ -5,\ -2)-(1,\ 3,\ -4)=(2,\ -8,\ 2)$, por ejemplo el vector $\overrightarrow{v_s}=(1,\ -4,\ 1)$, con lo cual considerando, por ejemplo el punto A: $s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3-4\mu \\ z=-4+\mu \end{cases}$.

b)

Justificar que las rectas r y s se cruzan es equivalente a justificar que dos vectores directores de las rectas, por ejemplo, $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ -4,\ 1)$ y un vector que tenga como origen un punto de r y como extremo un punto de s son linealmente independientes, es decir: estén situados en planos diferentes, lo cual significa que su rango tiene que ser tres.

Para $\lambda=1$ obtenemos el punto de r, P(12, 7, 1). Punto de s: A(1, 3, -4).

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AP}=P-A=(12,\ 7,\ 1)-(1,\ 3,\ -4)=(11,\ 4,\ 5).$$

$$Rango\ \ de\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 11 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-20-8+22-88-4-10=22-130=-108 \neq 0.$$

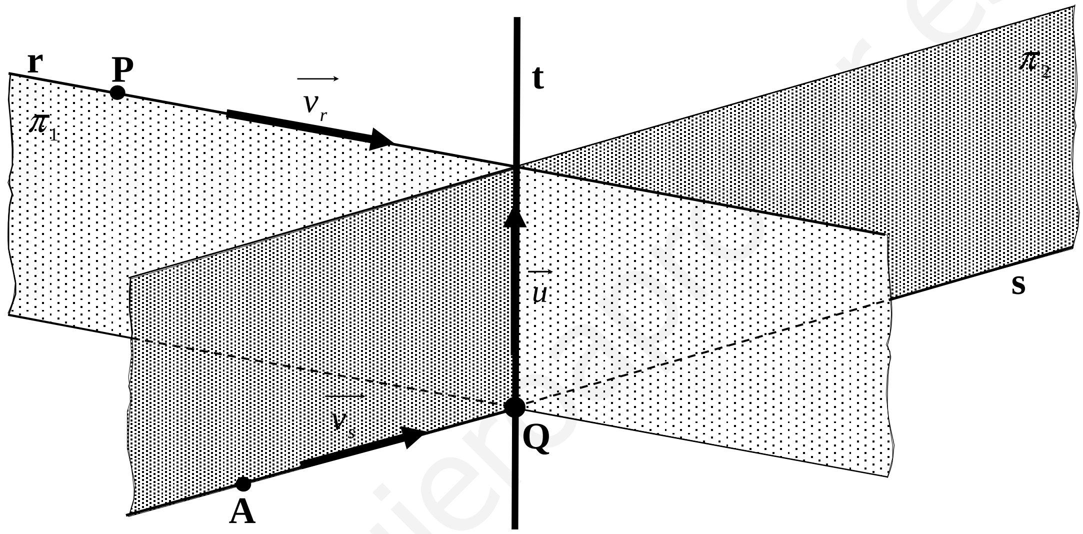
$$\underline{\underline{Rango\ de\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}=3 \Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan,\quad c.q.j.}}$$

c)

Un vector $\overrightarrow{u}$ perpendicular común a las rectas r y s puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2j - 4k - 2k - 8i - j = -6i - 3j - 6k \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 2)}}.$$

Para determinar la recta t, perpendicular común a las rectas r y s vamos a seguir el siguiente procedimiento, que además se ilustra con el gráfico adjunto:



En primer lugar determinamos el plano $\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{u}\right)$:

$$\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{u}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-12 & y-7 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$4(x-12) + (z-1) - 4(y-7) - 4(z-1) + 2(x-12) - 2(y-7) = 0\ ;;\ 6(x-12) - 6(y-7) - 3(z-1) = 0\ ;;$$

$$2(x-12) - 2(y-7) - (z-1) = 0\ ;;\ 2x - 24 - 2y + 14 - z + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 2x - 2y - z - 9 = 0}\ .$$

Ahora determinamos el plano $\pi_2\left(A;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{u}\right)$:

$$\pi_2\left(A;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-8(x-1) + (z+4) + 2(y-3) + 8(z+4) - (x-1) - 2(y-3) = 0\ ;;$$

$-9(x-1)+9(z+4)=0$;; $(x-1)-(z+4)=0$;; $x-1-z-4=0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x-z-5=0}$.

La recta t es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección; expresada por dos ecuaciones implícitas es $\underline{t \equiv \begin{cases} 2x-2y-z-9=0 \\ x-z-5=0 \end{cases}}$.

El punto Q, intersección de las rectas s y t es también el punto de intersección de la recta $s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3-4\mu \\ z=-4+\mu \end{cases}$ con el plano $\pi_1 \equiv 2x-2y-z-9=0$.

Los puntos de la recta s son de la forma $Q(1+\mu,\ 3-4\mu,\ -4+\mu)$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x-2y-z-9=0 \\ Q(1+\mu,\ 3-4\mu,\ -4+\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2(1+\mu)-2(3-4\mu)-(-4+\mu)-9=0 \ ;;$$

$2+2\mu-6+8\mu+4-\mu-9=0$;; $9\mu=9$;; $\underline{\mu=1} \Rightarrow \underline{\underline{Q(2,\ -1,\ -3)}}$

****

3º) Dadas las funciones $f(x)=x^3-3x+8$ y $g(x)=-3x$, se pide:

a) Calcular el máximo absoluto de la función f(x) en el intervalo [-3, 0].

b) Calcular el punto de corte de la curva y = f(x) y la recta y = g(x).

c) Obtener el área del recinto limitado por la curva y = f(x) y las rectas y = g(x), x = -3 e y = 0.

----

a)

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=1} \;;;\; \underline{x_2=-1}. \quad \{x_1 \notin [-3,\ 0]\}$$

$$f''(x)=6x \;;;\; f''(-1)=-6<0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=(-3)^3-3\cdot(-3)+8=-27+9+8=-10 \\ f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+8=-1+3+8=10\ (Máx.\ \ relativo) \\ f(0)=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{array}{l} Máximo\ \ absoluto\ \ en \\ [-3,\ 0]\ \ para\ \ x=-1 \end{array}}}$$

<u>En el intervalo considerado, el máximo obtenido es absoluto.</u>

b)

El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema que forman ambas funciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+8 \\ g(x)=-3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x+8=-3x \;;;\; x^3+8=0 \Rightarrow \underline{x=-2} \;;;\; g(-2)=6$$

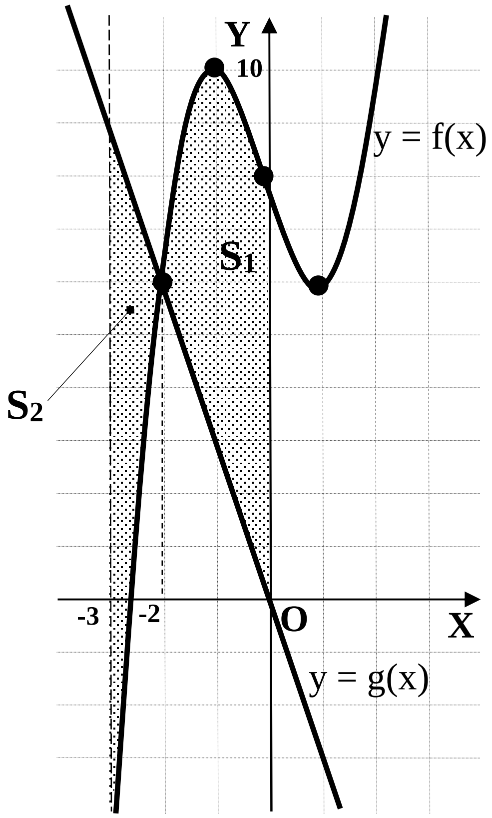
<u>El punto de corte es P(-2, 6).</u>

c)

Para x = 1 la función tiene un mínimo relativo; como quiera que f(1) = 6, el mínimo relativo es Q(1, 6).

Lo anterior significa que la función únicamente corta al eje de abscisas en un punto que pertenece al intervalo cerrado considerado [-3, 0].

La representación gráfica aproximada de la situación es la que se indica en la figura, donde la superficie pedida es la que aparece sombreada.



Como puede apreciarse, la superficie a calcular está dividida en dos partes, la primera limitada por las funciones y la recta x = 0 y la segunda limitada por las funciones y por la recta x = -3.

En la primera de las superficies, S_1, todas las ordenadas de la curva son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que su valor es el siguiente:

$$S_1 = \int_{-2}^{0} \left[\left(x^3 - 3x + 8\right) - \left(-3x\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 3x + 8 + 3x\right) \cdot dx = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + 8\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{16}{4} - 16\right) = -4 + 16 = \underline{12\ u^2 = S_1}$$

En la segunda de las superficies, S_2, todas las ordenadas de la curva son iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que su valor es:

$$S_2 = \int_{-3}^{-2} \left[-3x - \left(x^3 - 3x + 8\right)\right] \cdot dx = \int_{-3}^{-2} \left(-3x - x^3 + 3x - 8\right) \cdot dx = \int_{-3}^{-2} \left(-x^3 - 8\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{-3}^{-2} = \left[-\frac{(-2)^4}{4} - 8 \cdot (-2)\right] - \left[-\frac{(-3)^4}{4} - 8 \cdot (-3)\right] = \left(-\frac{16}{4} + 16\right) - \left(-\frac{81}{4} + 24\right) =$$

$$= -4 + 16 + \frac{81}{4} - 24 = \frac{81}{4} - 12 = \frac{81 - 48}{4} = \underline{\frac{33}{4}\ u^2 = S_2}$$

$$S_T = S_1 + S_2 = 12 + \frac{33}{4} = \frac{48 + 33}{4} = \underline{\underline{\frac{81}{4}\ u^2 = S_T}}$$

****

4º) Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1’8 m/min.

a) Obtener el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio.

b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del recinto quemado en el instante en que el radio alcance 45 metros.

----

a)

Teniendo en cuenta que la velocidad es $v = \frac{e}{t}$ y considerando que el espacio recorrido en cualquier instante t es el valor del radio, será $r = v \cdot t$.

Sabiendo que la superficie del círculo es $S = \pi \cdot r^2$; sustituyendo el valor de r:

$$S = \pi \quad r^2 = \pi \quad (v \quad \cdot t)^2 = \pi \quad \cdot (1'8 \cdot t)^2 = \underline{\underline{3'24 \cdot \pi \cdot t^2 \;\; m^2 = S}}$$

b)

La velocidad de aumento de la superficie es su derivada con respecto al tiempo:

$$S\,'_t = 2 \cdot 3'24 \cdot \pi \cdot t = \underline{6'48\pi \cdot t = S'_t}$$

El radio alcanza los 45 metros en el siguiente tiempo:

$$r = v \cdot t \;\Rightarrow\; 45 = 1'8 \cdot t \;\;;;\;\; t = \frac{45}{1'8} = \frac{450}{18} = \frac{50}{2} = \underline{45 \;\; seugndos = t}$$

Particularizando para el caso de t = 45 segundos:

$$S\,'_{45} = 6'48 \cdot 3'14 \cdot 45 = 916'09 \;\; m^2 \,/\, seg.$$

<u>Cuando el radio es de 45 metros arden en cada segundo 916’09 metros cuadrados.</u>

****

REPERTORIO B

1º) A es una matriz 3 x 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) El determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3.

b) Calcular la matriz fila X = (x, y, z) que es solución de la ecuación $X \cdot A^3 = B \cdot A^2$, donde B el la matriz fila B = (1, 2, 3).

c) Calcular la matriz inversa de A.

----

a)

$$|A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3-8+4 = \underline{\underline{-1 = |A^3|}}$$

$$\left(A^3\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \;;;\; Adj\left(A^3\right)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$X \cdot A^3 = B \cdot A^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} x-2y+2z & -y+2z & 2x-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2-3 & 1+0-3 & 0-2+6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=-3 \\ -y+2z=-2 \\ 2x-3z=4 \end{array}\right\}}$$

Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-9-16+8+12}{3-8+4}=\frac{-5}{-1}=\underline{\underline{5=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}}{-1}=\frac{6-12+8-8}{-1}=\frac{-6}{-1}=\underline{\underline{6=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-4+8-6}{-1}=\frac{-2}{-1}=\underline{\underline{2=z}}$$

La matriz pedida es X = (5   6   2)

c)

Una forma de obtener la matriz inversa de A es la siguiente:

$$A^{-1}=\frac{A^2}{A^3}=A^2\cdot\left(A^3\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 6 & 7 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6+6+0 & -8+7-0 & -4+4+0\\ 3+0-2 & 4+0-2 & 2+0-1\\ 3-6+4 & 4-7+4 & 2-4+2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

****

2º) En el espacio se consideran la recta r, intersección de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=15$ y $\pi_2 \equiv 2x-7y+2z=3$ y el plano π que pasa por los puntos $A(11,\ 1,\ 2)$, $B(5,\ 7,\ 5)$ y $C(7,\ -1,\ -2)$.

a) Calcular unas ecuaciones paramétricas de r y la ecuación implícita de π.

b) Calcular el punto P intersección de r y π y el ángulo α que determinan r y π.

c) Calcular los puntos M y N de la recta r cuya distancia al plano π es de 3 unidades.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-15=0 \\ 2x-7y+2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=15-\lambda \\ 2x-7y=3-2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+2y=30-2\lambda \\ -2x+7y=-3+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y=27 \ ;;\ \underline{y=3} \ ;;\ x+y=15-\lambda \ ;;\ x=15-\lambda-3=\underline{12-\lambda=x} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=12-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Son vectores directores del plano π, por ejemplo, los siguientes:

$$\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,\ 7,\ 5)-(11,\ 1,\ 2)=(-6,\ 6,\ 3) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u}=(-2,\ 2,\ 1)}$$

$$\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{AC}=C-A=(7,\ -1,\ -2)-(11,\ 1,\ 2)=(-4,\ -2,\ -4) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ 2)}$$

Considerando, por ejemplo, el punto C:

$$\pi(C;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-7 & y+1 & z+2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \ ;;$$

$$4(x-7)-2(z+2)+2(y+1)-4(z+2)-(x-7)+4(y+1)=0 \ ;;$$

$$3(x-7)+6(y+1)-6(z+2)=0 \ ;;\ (x-7)+2(y+1)-2(z+2)=0 \ ;;$$

$$x-7+2y+2-2z-4=0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x+2y-2z-9=0}}$$

b)

Los puntos de la recta r son de la forma $P(12-\lambda,\ 3,\ \lambda)$. El punto de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 12 - \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + 2y - 2z - 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (12 - \lambda) + 2 \cdot 3 - 2\lambda - 9 = 0 \;;;\; 12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9 = 0 \;;;$$

$$9 - 3\lambda = 0 \;;;\; 3 - \lambda = 0 \;;;\; \underline{\lambda = 3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 12 - 3 = 9 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P(9,\; 3,\; 3)}}$$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{w} = (-1,\; 0,\; 1)$ y el vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\; 2,\; -2)$.

El ángulo α que forma la recta r con el plano π es el complementario del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{w}\;\; y\;\; \overrightarrow{n}$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores y considerando que los ángulos $\alpha\;\; y\;\; \beta$ son complementarios, se puede hacer lo siguiente:

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{w}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; sen\,\alpha = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{w}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(-1,\; 0,\; 1) \cdot (1,\; 2,\; -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{-1 + 0 - 2}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 135^{\circ}}}$$

c)

Una de las formas de calcular la distancia de un punto $P_0(x_0,\; y_0,\; z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\; \pi) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

En el apartado anterior hemos concluido que los puntos de la recta r son de la forma $P(12 - \lambda,\; 3,\; \lambda)$; sabiendo que la distancia de cualquiera de estos puntos al plano $\pi \equiv x + 2y - 2z - 9 = 0$ es de 3 unidades, sería:

$$d(P,\; \pi) = 3 = \frac{|\,1 \cdot (12 - \lambda) + 2 \cdot 3 - 2 \cdot \lambda\,|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|12 - \lambda + 6 - 2\lambda|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|18 - 3\lambda|}{\sqrt{9}} = \frac{3 \cdot |\,6 - \lambda\,|}{3} =$$

$$= |\,6 - \lambda\,| = 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 6 - \lambda = 3 \;;;\; \lambda_1 = 3 \;\rightarrow\; \underline{\underline{M(9,\; 3,\; 3)}} \\ \\ -6 + \lambda = 3 \;;;\; \lambda_2 = 9 \;\rightarrow\; \underline{\underline{N(3,\; 3,\; 9)}} \end{cases}$$

****

3º) a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + sen\ x$. Calcular a y b si O(0, 0) es un punto de la curva $y = ax + b + sen\ x$, cuya recta tangente en O(0, 0) es el eje OX.

b) Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\ \pi]$.

c) Calcular esos dos puntos.

----

a)

Por contener la función al punto O(0, 0) tiene que ser:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0 + b + sen\ 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$$

Por ser la tangente en el origen el eje de abscisas, la pendiente (derivada) tiene que ser cero en ese punto:

$$f'(x) = a + \cos\ x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow a + \cos\ 0 = 0\ ;;\ a + 1 = 0\ ;;\ \underline{\underline{a = -1}}$$

b)

La función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ es continua en R por ser la suma de dos funciones continuas en R, por lo tanto es continua en cualquier intervalo que se considere.

Los valores de la función en los extremos del intervalo considerado son:

$$g(0) = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 + sen\ 0 = \underline{0 = g(0)}\ ;;\ g(\pi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi + sen\ \pi = -2 + 0 = \underline{-2 = g(\pi)}$$

De momento sabemos que se anula en un punto del intervalo: para x = 0.

Para que se anule en otro punto del intervalo $[0,\ \pi]$, teniendo en cuenta los valores que toma la función en los extremos del intervalo, es condición necesaria que tenga, por lo menos, un máximo relativo en el intervalo.

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos\ x = 0\ ;;\ \cos\ x = \frac{2}{\pi}\ ;;\ x = arc\ \cos\ \frac{2}{\pi} \cong \underline{0'88\ unidades = x} \Rightarrow \underline{x \in [0,\ \pi]}.$$

(Como es natural, el ángulo se ha expresado en radianes)

Si se hubiera expresado en grados sexagesimales se hubiera hecho lo siguiente:

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos\ x = 0\ ;;\ \cos\ x = \frac{2}{\pi} = 0'6366 \Rightarrow \underline{x = 50^{\circ}\ 27'\ 35'' = 0'88\ radianes}$$

<u>Lo anterior justifica que la función g(x) se anula al menos dos veces en el intervalo.</u>

****

4º) Dos postes de 3m y 4m se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 m y, en el segmento que las une, hay un punto P que dista x metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:

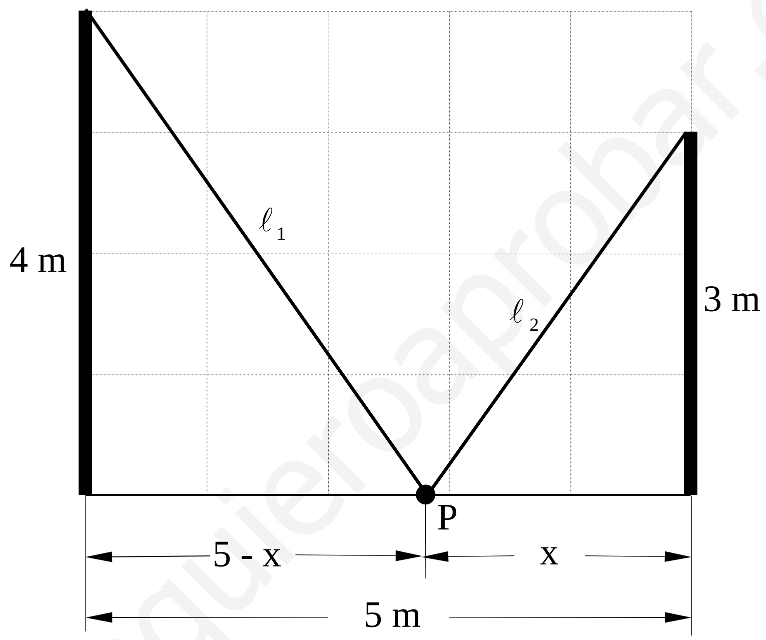
a) Obtener la expresión f(x) de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos.

b) Demostrar que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados. Calcular esa longitud mínima.

----

a)

La situación es la que se indica en la figura.



$$f(x) = \ell = \ell_1 + \ell_2 = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} + \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{16 + 25 - 10x + x^2} + \sqrt{9 + x^2} =$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{x^2 - 10x + 41} + \sqrt{x^2 + 9} = f(x)}}$$

b)

La longitud total del cable será mínima cuando su derivada sea cero:

$$f'(x) = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 41}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 41}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 41}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \ ;; \ \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 10x + 41} = \frac{x^2}{x^2 + 9} \ ;;$$

$$x^4 + 9x^2 - 10x^3 - 90x + 25x^2 + 225 = x^4 - 10x^3 + 41x^2 \ ;; \ 34x^2 - 90x + 225 = 41x^2 \ ;;$$

$$7x^2+90x-225=0\ ;;\quad x=\frac{-90\pm\sqrt{8100+28\cdot 225}}{14}=\frac{-90\pm\sqrt{14400}}{14}=\frac{-90\pm 120}{14}=$$

$$=\frac{-45\pm 60}{7}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{15}{7} \\ x_2=-\dfrac{105}{7}\Rightarrow(carece\ \ de\ \ sentido\ \ lógico)\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{15}{7}\cong \underline{\underline{2'14\ metros=x}}$$

Para justificar que el valor encontrado es para un mínimo relativo, es necesario que la segunda derivada sea positiva para ese valor:

$$f'(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-10x+41}-(x-5)\cdot\dfrac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+41}}}{x^2-10x+41}+\frac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-10x+41}-\dfrac{(x-5)^2}{\sqrt{x^2-10x+41}}}{x^2-10x+41}+\frac{\sqrt{x^2+9}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=$$

$$=\frac{x^2-10x+41-x^2+10x-25}{(x^2-10x+41)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}=\underline{\frac{16}{(x^2-10x+41)^{\frac{3}{2}}}+\frac{9}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{15}{7}\right)=\frac{16}{\left(\dfrac{225}{49}-10\cdot\dfrac{15}{7}+41\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{9}{\left(\dfrac{225}{49}+9\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{16}{\left(\dfrac{225-1050+2009}{49}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{9}{\left(\dfrac{225+441}{49}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{16}{\left(\dfrac{1184}{49}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{9}{\left(\dfrac{666}{49}\right)^{\frac{3}{2}}}>0\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{Mínimo,\ como\ queríamos\ \ justificar}}$$

La longitud total es la siguiente:

$$\ell=f\left(\tfrac{15}{7}\right)=\sqrt{\frac{1184}{49}}+\sqrt{\frac{666}{49}}=\frac{\sqrt{1184}}{7}+\frac{\sqrt{666}}{7}=\frac{\sqrt{1184}+\sqrt{666}}{7}=\frac{34'41+25'81}{7}=\frac{60'22}{7}=8'60$$

$$\underline{\underline{\ell=8'60\ metros}}$$

****