PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que AX = OX.

b) Todos los vectores X tales que AX = 3X.

c) Todos los vectores X tales que AX = 2X.

----

a)

$$AX=OX \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} x-y=x \\ 2x+4y=y \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} \underline{y=0} \\ 2x+3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underline{x=0} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$AX=3X \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} x-y=3x \\ 2x+4y=3y \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x+y=0 \;;;\; y=-2x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{X=\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix},\; \forall x\in R}}$$

c)

$$AX = 2X \;\; \Rightarrow \;\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \;\; ;; \;\; \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \;\; \Rightarrow \;\; \left. \begin{matrix} x-y=2x \\ 2x+4y=2y \end{matrix} \right\} \;\; \left. \begin{matrix} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \left. \begin{matrix} x+y=0 \\ x+y=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \;\; x+y=0 \;\; ;; \;\; y=-x \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, \;\; \forall x \in R}}$$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es compatible para todo valor de α.

b) Obtener razonadamente el valor de α para el que el sistema es indeterminado.

c) Resolver el sistema cuando $\alpha=0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix}=-2+2\alpha+3+3-\alpha-4=\alpha=0 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha=0}$$

$$\underline{Para\ \ \alpha\neq 0\ \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}$$

$$Para\ \ \alpha=0\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3=F_1+F_2\} \Rightarrow\ Rango\ \ M'=2$$

$$\underline{Para\ \ \alpha=0\ \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto:\ el\ \ sistema\ \ es\ \ Compatible\ \ \forall\alpha\in R,\ \ c.q.p.}}$$

b)

Como se ha demostrado en el apartado anterior:

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Compatible\ \ Indeterminado\ \ para\ \ \alpha=0}}$$

c)

Para $\alpha=0$ el sistema resulta: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=4 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3-\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=4-2\lambda \;\;;;\;\; \underline{x=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\lambda} \;\;;;\;\; \left.\begin{array}{r} 2x+2y=6-2\lambda \\ -2x+y=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=5-\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ y=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda \quad , \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=3$ y $\pi_2 \equiv x+y-\alpha z=0$, se pide calcular razonadamente:

a) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares y, para este valor de α, obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de esos dos planos.

b) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos y, para este valor de α, obtener la distancia entre los dos planos.

----

a)

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,\ 1,\ -\alpha)$.

Los planos son perpendiculares cuando lo sean sus vectores normales, o sea, cuando el producto escalar de los vectores normales sea cero:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ -\alpha) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-\alpha) = 1+1-\alpha = 2-\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}$$

Para el valor de $\alpha = 2$ la ecuación de la recta r que determinan los planos, expresada por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=3-\lambda \\ y-2z=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y+z=3-\lambda \\ -y+2z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3z=3 \;;;\; \underline{z=1}$$

$$y-2z=-\lambda \;;;\; y=-\lambda+2z=-\lambda+2=\underline{2-\lambda=y}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1 \end{cases}}}$$

b)

Los planos son paralelos cuando lo sean sus vectores normales, o sea, cuando las componentes son proporcionales:

$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{-\alpha} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=-1}}$. El plano resulta $\pi_2 \equiv x+y+z=0$

La distancia entre dos planos paralelos es la misma que la distancia de un punto de uno de los plano al otro.

Por ejemplo, un punto del plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$ es A(1, 1, 1).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ y al punto A(1, 1, 1) es:

$$d(\pi_1,\ \pi_2) = d(P,\ \pi_2) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}\ u = d(\pi_1,\ \pi_2)}}$$

****

2º) Dados el punto O(0, 0, 0) y el plano $\pi \equiv x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π.

b) Las coordenadas del punto P simétrico de O respecto del plano π.

c) La ecuación del plano π' que contiene al eje X y a la recta r.

----

a)

Un vector normal al plano $\pi \equiv x + y + z = 6$ es $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$.

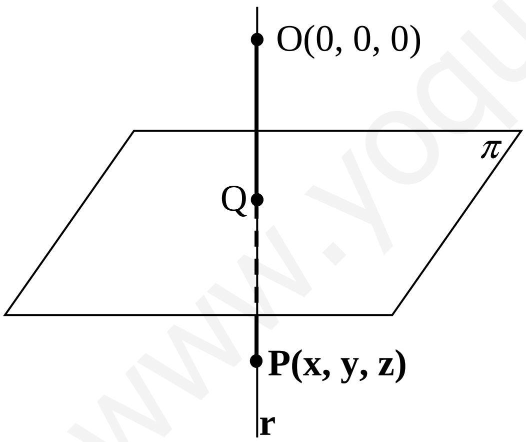
Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente (paralelo) al vector normal del plano, o sea, puede ser el mismo.

La ecuación de la recta pedida r, dada por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{r \equiv x = y = z}}$$

b)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.



El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 6 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda = 6 \;;\; 3\lambda = 6 \;;\; \underline{\lambda = 2}$$

El punto de corte es Q(2, 2, 2).

Para que P sea el punto simétrico de O con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - O = P - Q \;;\; (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (x, y, z) - (2, 2, 2) \;;$$

$$(2, 2, 2) = (x - 2, y - 2, z - 2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 2 \rightarrow \underline{x = 4} \\ y - 2 = 2 \rightarrow \underline{y = 4} \\ z - 2 = 2 \rightarrow \underline{z = 4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P(4, 4, 4)}}$$

c)

El eje X es la recta cuyo vector director puede ser $\overrightarrow{w}=(1,\ 0,\ 0)$.

La recta r tiene como vector director $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 1)$.

El plano π' que contiene al eje X y a la recta r tiene como vectores directores a los de las rectas y, además, sabemos que pasa por el origen; su ecuación general es la siguiente:

$$\pi'\left(O;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;; \ \ \underline{\underline{\pi' \equiv y - z = 0}}$$

****

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) Dada la función $f(t)=at+b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x)=x\int_1^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)dt$.

b) La expresión de la derivada F'(x) de la función F(x).

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: F''(0) = 0.

----

a)

$$\int_1^{x+1} f(t)dt=\int_1^{x+1}(at+b)dt=\left[\frac{at^2}{2}+bt\right]_1^{x+1}=\left[\frac{a\cdot(x+1)^2}{2}+b\cdot(x+1)\right]-\left(\frac{a\cdot 1^2}{2}+b\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{a(x^2+2x+1)}{2}+bx+b-\frac{a}{2}-b=\frac{ax^2+2ax+a}{2}+bx-\frac{a}{2}=\frac{ax^2+2ax+a+2bx-a}{2}=$$

$$=\frac{ax^2+2ax+2bx}{2}=\underline{\underline{\frac{a}{2}x^2+(a+b)x}}$$

b)

Teniendo en cuenta lo obtenido en el apartado anterior, el valor de F(x) es el siguiente:

$$F(x)=x\int_1^{x+1} f(t)dt=x\cdot\left[\frac{a}{2}x^2+(a+b)x\right]=\underline{\frac{a}{2}x^3+(a+b)x^2=F(x)}.$$

Su derivada es la siguiente: $\underline{\underline{F'(x)=\frac{3a}{2}x^2+2(a+b)x}}$

c)

$$F''(x)=3ax+2(a+b)\ \Rightarrow\ F''(0)=0\ \Rightarrow\ 2(a+b)=0\ \ ;;\ \ a+b=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=-b}}$$

****

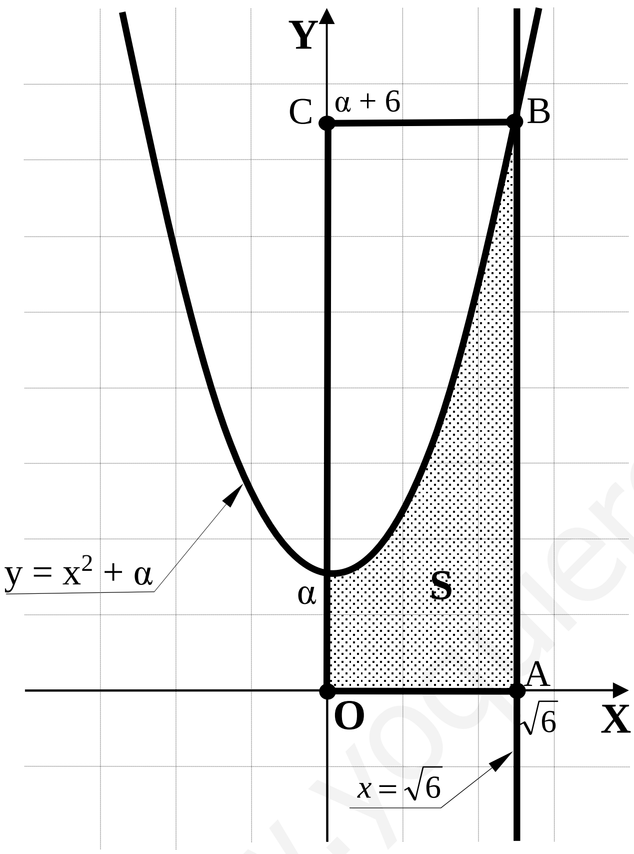
2º) Para cada número real positivo α, se considera la función $g(x)=x^2+\alpha$. Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x=\sqrt{6}$ y la curva $y=g(x)$.

b) El valor de α para el que la curva $y=x^2+\alpha$ divide al rectángulo de vértices O(0, 0), $A(\sqrt{6},\ 0)$, $B(\sqrt{6},\ 6+\alpha)$ y $C(0,\ 6+\alpha)$ en dos regiones de igual área.

----

a)



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se refleja en la figura adjunta.

El área pedida , en función del número real α es la siguiente:

$$S=\int_0^{\sqrt{6}}\left(x^2+\alpha\right)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}+\alpha x\right]_0^{\sqrt{6}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}^3}{3}+\alpha\cdot\sqrt{6}\right)-0=\frac{6\sqrt{6}}{3}+\sqrt{6}\,\alpha=$$

$$=2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,\alpha=\underline{\underline{\sqrt{6}\,(2+\alpha)\ u^2=S}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el área del rectángulo es $S_R=(a+6)\sqrt{6}\ u^2$, el valor de α se deduce de la forma siguiente:

$$S_R=2S\ \Rightarrow\ (a+6)\sqrt{6}=2\cdot\sqrt{6}\,(2+\alpha)\ ;;\ a+6=4+2\alpha\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\alpha=2}}$$

****

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1º) Un móvil se mueve con velocidad constante de 2 m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta x = 1, partiendo del punto M(1, 0) situado a 1 metro del origen. Se pide obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto M(t) donde está situado el móvil después de t segundos.

b) La función m(t) igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto O(0, 0) y por el punto M(t).

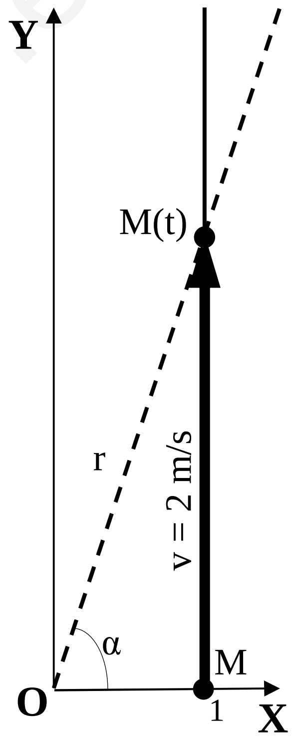
c) La derivada de la función m(t).

----

a)

Las coordenadas del punto M(t), teniendo el cuenta el punto de partida M y la velocidad v = 2 m/s es: $\left.\begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2t \end{array}\right\}$.

Después de t segundos el móvil se encuentra en el punto siguiente: $\underline{\underline{M(t) \equiv (1,\ 2t)}}$.



b)

La pendiente de la recta r es la tangente del ángulo α: $m = tag\ \alpha = \frac{2t}{1} = 2t$.

La función pedida es $\underline{\underline{m(t) = 2t}}$.

c)

La derivada de la función m(t) es la siguiente:

$$\underline{\underline{m'(t) = 2}}$$

****

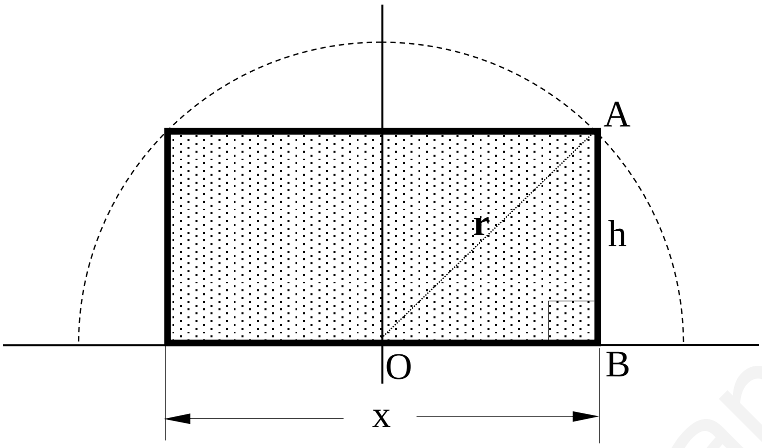
2º) En un terreno con forma de semicírculo de radio $r=\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x.

b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo.

----

a)



Del triángulo rectángulo OAB y teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia $r=\sqrt{50}$, el valor de h en función de x es:

$$h=\sqrt{r^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2-\frac{x^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{50-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{200-x^2}{4}}=$$

$$\underline{=\frac{1}{2}\sqrt{200-x^2}=h}.$$

El área del rectángulo es la siguiente:

$$S=x\cdot h=x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{200-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{200x^2-x^4}=\underline{\underline{\frac{x}{2}\sqrt{200-x^2}=S}}$$

b)

El área será máxima cuando su derivada sea cero:

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{400x-4x^3}{2\sqrt{200x^2-x^4}}=\frac{100x-x^3}{\sqrt{200x^2-x^4}}=\frac{100x-x^3}{x\sqrt{200-x^2}}=\frac{100-x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0\ \Rightarrow\ 100-x^2=0\ ;;$$

$$x=\sqrt{100}=\pm 10$$

Solución: x = 10 metros.

****