PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dado el sistema $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$ dependiente del parámetro real α, se pide:

a) Determinar razonadamente los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.

c) Obtener razonadamente la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \;;\; M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = 0 \;;\; a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (Ruffini) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Las soluciones diferentes son los valores de α: $\alpha=1$ y $\alpha=-2$.

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=1 < n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\ Veámos\ el\ rango\ de\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1+1+2+2-1=9\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-2 \Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos los casos de compatible determinado aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2+1+1-\alpha-1-\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \underline{\frac{1}{\alpha+2}=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2+1+1-1-\alpha-\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \underline{\frac{1}{\alpha+2}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{\alpha^2+1+1-\alpha-\alpha-1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2}=z$$

$$\textit{Solución}:\ x=y=z=\frac{1}{\alpha+2},\ \ \forall\alpha\in R,\ \{\alpha\neq 1\ ;;\ \alpha\neq -2\}$$

c)

Para $\alpha=0$ el sistema resultante es $\begin{cases} y+z=1\\ x+z=1\\ x+y=1\end{cases}$.

Teniendo en cuenta las soluciones del apartado b):

$$\textit{Solución}:\ x=y=z=\frac{1}{2}$$

****

2º) Sean $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3.

b) Los números reales α y β para los que verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 289-290 & 493-493 \\ -170+170 & -290+289 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I=A^2}}$$

$$A^3=A^2\cdot A=-I\cdot A=-A=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}=A^3}}$$

b)

$$(I+A)^3=\alpha I+\beta A \Rightarrow I^3+3I^2A+3IA^2+A^3=\alpha I+\beta A \;;;\; I+3A+3A^2+A^3=\alpha I+\beta A \;;;$$

$$I+3A-3I-A=\alpha I+\beta A \;;;\; 2A-2I=\alpha I+\beta A \;;;\; (2-\beta)A=(2+\alpha)I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\beta)\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}=(2+\alpha)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 34-17\beta & 58-29\beta \\ -20+10\beta & -34+17\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+\alpha & 0 \\ 0 & 2+\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 34-17\beta=2+\alpha \\ -20+10\beta=0 \\ 58-29\beta=0 \\ -34+17\beta=2+\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha=-2 \;;;\; \beta=2}}$$

****

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Se dan los puntos A(2, 1, 1) y B(1, 0, -1), y la recta r de ecuación $r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2}$. Se pide calcular razonadamente:

a) El punto C de r que equidista de A y B.

b) El área del triángulo ABC.

----

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2} \;\Rightarrow\; \underline{y=\lambda} \;;;\; \underline{x=5+\lambda} \;;;\; \underline{z=-2-2\lambda} \;\Rightarrow\; \underline{r \equiv \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}}.$$

Un punto genérico de r es $C'(5+\lambda,\ \lambda,\ -2-2\lambda)$.

$$\overline{AC'}=\sqrt{(5+\lambda-2)^2+(\lambda-1)^2+(-2-2\lambda-1)^2}=\sqrt{(3+\lambda)^2+(\lambda-1)^2+(-3-2\lambda)^2}=$$

$$=\sqrt{9+6\lambda+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+9+12\lambda+4\lambda^2}=\underline{\sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19}=\overline{AC'}}$$

$$\overline{BC'}=\sqrt{(5+\lambda-1)^2+(\lambda-0)^2+(-2-2\lambda+1)^2}=\sqrt{(4+\lambda)^2+\lambda^2+(-1-2\lambda)^2}=$$

$$=\sqrt{16+8\lambda+\lambda^2+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2}=\underline{\sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}=\overline{BC'}}$$

$$\overline{AC'}=\overline{BC'} \;\Rightarrow\; \sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19}=\sqrt{6\lambda^2+12\lambda+16} \;;;\; 6\lambda^2+16\lambda+19=6\lambda^2+12\lambda+17 \;;;$$

$$4\lambda+2=0 \;;;\; 2\lambda+1=0 \;;;\; \underline{\lambda=-\frac{1}{2}}$$

$$C'(5+\lambda,\ \lambda,\ -2-2\lambda) \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C\left(\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1\right)}}$$

b)

Los vectores de origen B que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BA}=A-B=(2,\ 1,\ 1)-(1,\ 0,\ -1)=(1,\ 1,\ 2)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}=C-B=\left(\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1\right)-(1,\ 0,\ -1)=\left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores que lo definen, o sea, la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores mencionados:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{4}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{4}\left|-k+14j-7k+2i\right|=\frac{1}{4}\left|2i+14j-8k\right|=\frac{1}{2}\left|i+7j-4k\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+7^2+(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+16}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{66}\cong 4'06\ u^2=S_{ABC}}}$$

****

2º) Dada la recta r, intersección de los planos $\pi_1 \equiv y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x-2y-1=0$, y la recta s de ecuación $s \equiv \frac{x}{2}=y-1=-z+3$, se pide:

a) Obtener razonadamente ecuaciones paramétricas de r y s.

b) Explicar de modo razonado cuál será la posición relativa de las rectas r y s.

c) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

----

a)

Unas expresiones de r y s por ecuaciones paramétricas pueden ser las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \;;;\; \underline{x=1+2\lambda} \;;;\; \underline{z=-\lambda} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} , \; \forall \lambda \in R}}$$

$$s \equiv \frac{x}{2}=y-1=-z+3 \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{x=6-2\lambda} \;;;\; \underline{y=4-\lambda} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=6-2\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

b)

El estudio de la posición relativa de las rectas r y s mediante sus vectores directores es como sigue.

El vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ -1)$.

Teniendo en cuenta que la recta s se puede expresar así: $s \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$, su vector director es $\overrightarrow{v_s}=(2,\ 1,\ -1)$. Como puede observase, tienen el mismo vector director, por lo cual las rectas r y s son paralelas o coincidentes.

Para diferenciar el caso tomamos, por ejemplo, un punto de r, P(1, 0, 0) y comprobamos si pertenece a s; en caso afirmativo las rectas son coincidentes y, en caso contrario las rectas son paralelas:

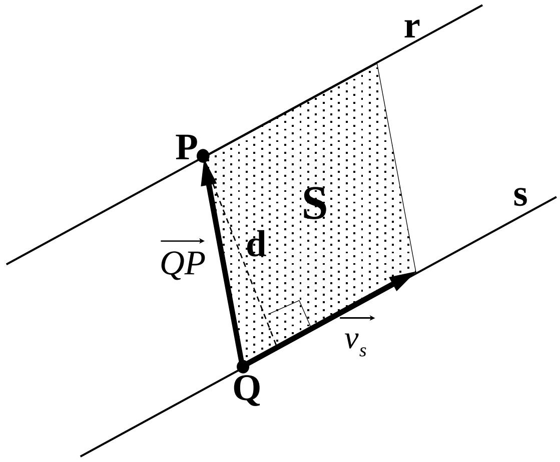
$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1} \\ P(1,\ 0,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{-1} \Rightarrow \underline{P \notin s}$$

<u>Las rectas r y s son paralelas.</u>

c)

La distancia entre las rectas r y s es la misma que la del punto P(1, 0, 0) perteneciente a r a la recta s.

La distancia del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que el punto Q(0, 1, 3) pertenece a s y $\overrightarrow{v_s}=(2,\ 1,\ -1)$ es el vector director de s.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v_s}\wedge\overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(P,\ s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_s}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}$.

$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,\ 0,\ 0)-(0,\ 1,\ 3)=\underline{(1,\ -1,\ -3)}$.

$$d(r,\ s)=d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|i+k-6j+2k+3i+j\right|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\left|4i-5j+3k\right|}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{16+25+9}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{50}{6}}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{5\sqrt{3}}{3}\ unidades=d(r,\ s)}}$$

****

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitado por: el eje X, el eje Y, la recta x = 2 y la curva $y=\frac{1}{4+x^2}$.

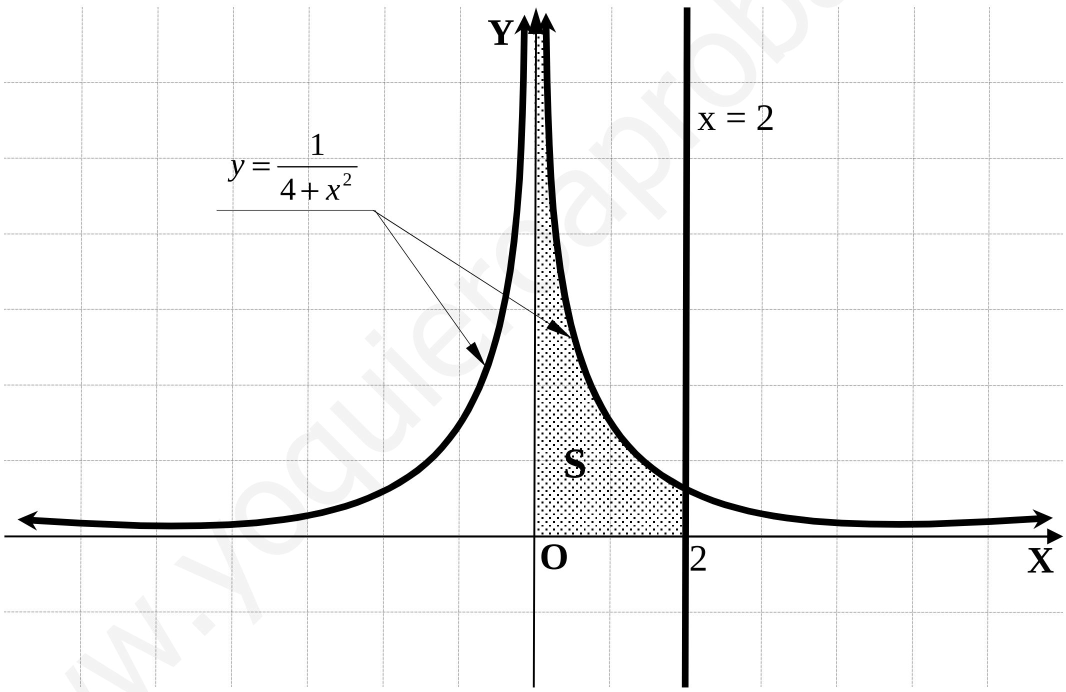
a) Calcular razonadamente el área de la región R.

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x=\alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B.

----

a)

La representación grafica, aproximada, de la situación es la que indica la gráfica adjunta.



El valor del área pedida S, es la siguiente: $S=\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\cdot dx$.

Teniendo en cuenta el valor de la integral indefinida:

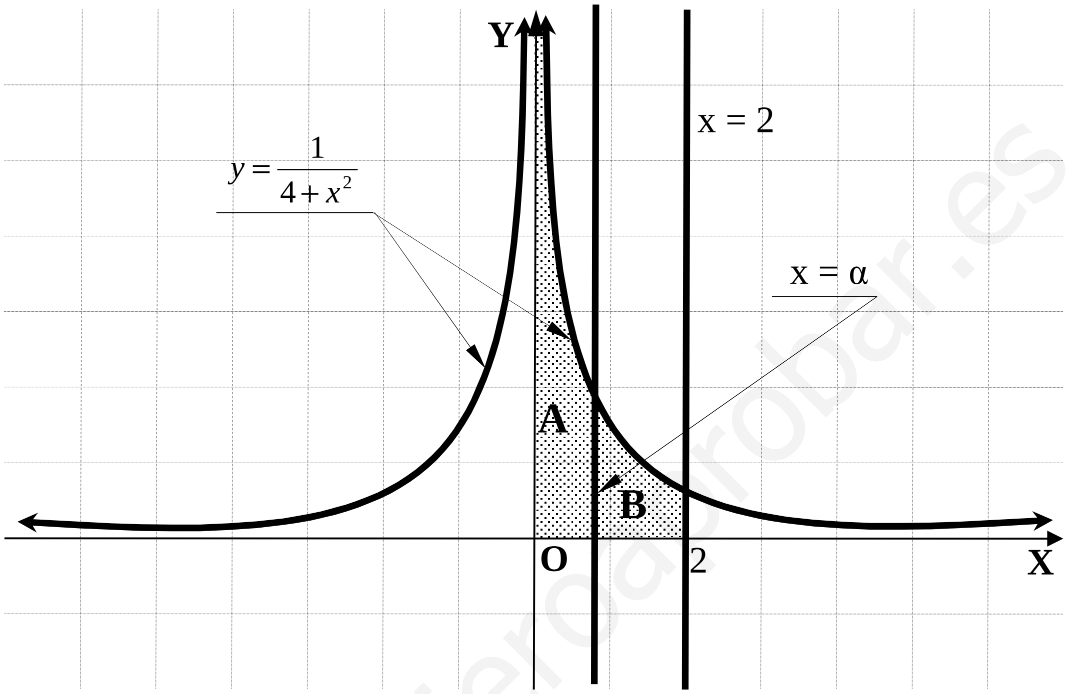
$$I=\int\frac{1}{4+x^2}\cdot dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}=t\\ dx=2\,dt\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot 2\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=\frac{1}{2}arc\ \ tag\ \ t+C=\underline{\frac{1}{2}arc\ \ tag\ \ \frac{x}{2}+C=I}$$

$$S=\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\cdot dx=\left[\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{x}{2}\right]_0^2=\left(\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{2}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\,arc\ tag\ 0\right)=\frac{1}{2}\,arc\ tag\ 1-0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{\pi}{8}\,u^2=S}}$$

b)



Teniendo en cuenta que A + B = S y que tiene que ser A = 2B, es:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\frac{\pi}{8} \\ A=2B \end{array}\right\}\Rightarrow\ A+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{8}\ \ ;;\ \ 8A+4A=\pi\ \ ;;\ \ 12A=\pi\ \ ;;\ \ \underline{A=\frac{\pi}{12}}$$

$$A=\frac{\pi}{12}=\int_0^\alpha \frac{1}{4+x^2}\cdot dx=\left[\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{x}{2}\right]_0^\alpha=\left(\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{\alpha}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\,arc\ tag\ 0\right)=\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{\alpha}{2}-0=\frac{\pi}{12}\ \ ;;$$

$$\frac{1}{2}\,arc\ tag\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{12}\ \ ;;\ \ arc\ tag\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}\ \ ;;\ \ \frac{\alpha}{2}=tag\ \frac{\pi}{6}=tag\ 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$

****

2º) Se considera la función real $f(x)=x^2-4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

a) La gráfica de la curva $y=f(x)$.

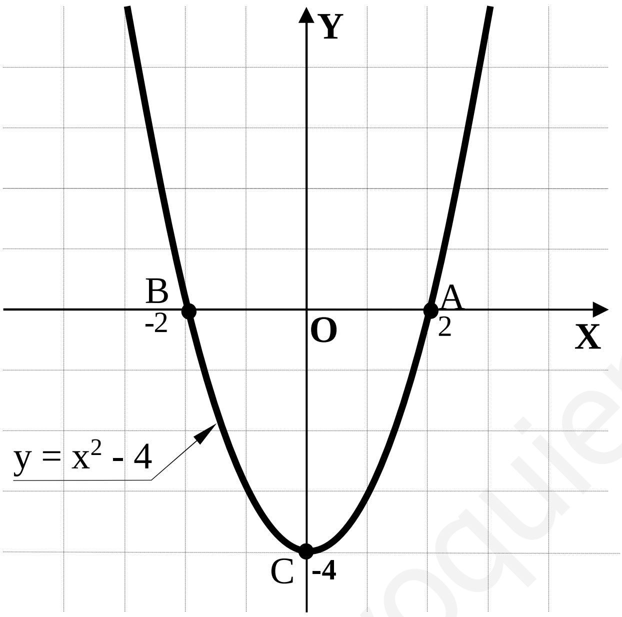
b) Los valores de x para los que está definida la función real $g(x)=L\,f(x)$.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g(x), razonando si tiene o no máximo absoluto.

----

a)

La función $f(x)=x^2-4$ es par, es una parábola simétrica respecto al eje de ordenadas; el punto de corte de la función con el eje Y, que es su vértice, es V(0, -4).



Por ser $f'(x)=2x$ y $f''(x)=2>0$, la función es convexa $(\cup)$, por lo cual el vértice es su mínimo absoluto.

Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$Eje\ X \rightarrow y=0\ ;;\ x^2-4=0\ ;;\ x^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2=-2 \Rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

b)

Sabiendo que la función logarítmica tiene como dominio, campo de existencia o campo de variabilidad $(0,\ +\infty)$, los valores de x para los que está definida la función real $g(x)=L\,f(x)=L\left|x^2-4\right|$ son los correspondientes a los intervalos siguientes, que corresponden a los valores positivos de la función, que se deducen de la gráfica de la función $f(x)=x^2-4$ expresada en la figura adjunta.

$$\underline{\underline{D[g(x)]=L\left|x^2-4\right| \Rightarrow (-\infty,\ -2)\cup(2,\ \infty)}}$$

c)

Una función es creciente o decreciente en función que lo sea su derivada:

$$g'(x)=\frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \Rightarrow g'(x)<0 \Rightarrow \underline{Decreciente} \\ \\ x>2 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow \underline{Creciente} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Decreciente \Rightarrow (-\infty,\ -2) \;\;;;\;\; Creciente \Rightarrow (2,\ +\infty)}}$$

Una función tiene un posible máximo relativo para los valores que anulan la primera derivada:

$g'(x)=\frac{2x}{x^2-4}=0 \Rightarrow x=0,\quad x\notin D[g(x)] \Rightarrow$ <u>La función g(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos.</u>

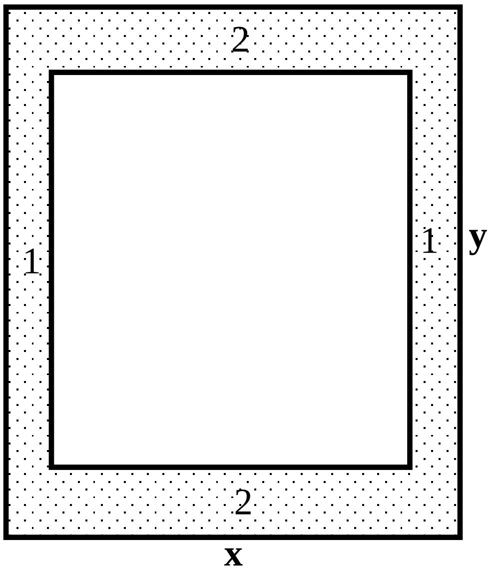
Sin embargo la función carece de máximos y mínimos absolutos por ser:

$$\lim_{x\to -2^-} g(x)=\lim_{x\to -2^-} L\left|x^2-4\right|=-\infty \;\;;;\;\; \lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+} L\left|x^2-4\right|=-\infty .$$

****

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1º) Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 10 cm^2 en hojas rectangulares impresas en una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo.



La superficie del cartel es $S = x \cdot y$, que tiene que ser mínima para lo cual su derivada tiene que ser cero.

Para poder derivar hemos de expresar una variable en función de la otra, para lo cual tendremos en cuenta que la superficie a imprimir, que es la central, tiene que ser de 10 cm^2. De la observación de la figura se deduce que:

$$(x-2)(y-4)=10 \ ;; \ xy-4x-2y+8=10 \ ;;$$

$$xy-2y=2+4x \ ;; \ y(x-2)=2+4x \ ;; \ \underline{y=\frac{2+4x}{x-2}}$$

Sustituyendo este valor es la superficie, resulta:

$$S = x \cdot y = x \cdot \frac{2+4x}{x-2} = \frac{2x+4x^2}{x-2}$$

$$S'(x)=\frac{(2+8x)(x-2)-\left(2x+4x^2\right)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x-4+8x^2-16x-2x-4x^2}{(x-2)^2}=\frac{4x^2-16x-4}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4x^2-16x-4=0 \ ;; \ x^2-4x-1=0$$

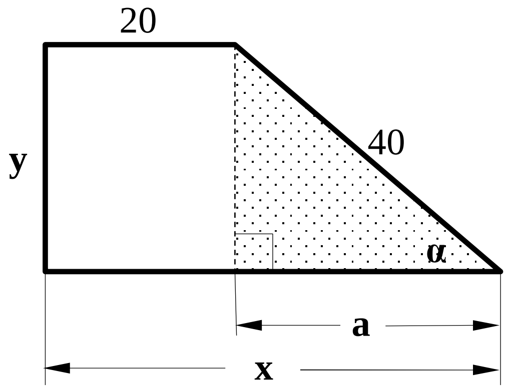
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2+\sqrt{5}} \\ \\ x_2=2-\sqrt{5} \end{cases}$$

La solución $x=2-\sqrt{5}<0$ carece de sentido lógico (es para máximo), por lo que la solución para x es $2+\sqrt{5} \cong \underline{\underline{4'24 \ cm = x}}$. $y=\frac{2+4x}{x-2} \cong \frac{2+4\cdot 2'24}{4'24-2}=\frac{18'94}{2'24}=\underline{\underline{8'46 \ cm = y}}$

****

2º) Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar razonadamente el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima.

Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.



El área del trapecio es $S = \frac{x+20}{2} \cdot y$, que tiene que ser máxima y debemos expresarla en función de α, que es el valor que se nos solicita; es por ello que debemos expresar, en primer lugar, los valores de x e y en función de α para, al final, poder expresar el valor de S en función del valor pedido α.

Del triángulo rectángulo sombreado de la figura se deduce:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{40} \Rightarrow \underline{y = 40\,sen\ \alpha}\ ;;\ \cos\alpha = \frac{a}{40} = \frac{x-20}{40} \Rightarrow x = 40\cos\alpha + 20 = \underline{20(2\cos\alpha + 1) = x}$$

Sustituyendo en el valor de S los valores obtenidos de x e y, resulta:

$$S = \frac{[20(2\cos\alpha+1)]+20}{2} \cdot 40\,sen\ \alpha = 20(2\cos\alpha + 2) \cdot 40\,sen\ \alpha = \underline{800(\cos\alpha + 1) \cdot sen\ \alpha = S}\ .$$

Para que la superficie sea máxima su derivada tiene que ser cero:

$$S'(\alpha) = 800 \cdot [-sen\ \alpha \cdot sen\ \alpha + (\cos\alpha + 1) \cdot \cos\alpha] = 800 \cdot (-sen^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -sen^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0.\quad \textit{Sabiendo que } sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha:$$

$$-(1-\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0\ ;;\ -1 + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0\ ;;\ 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 60^{\circ}} \\ \cos\alpha_2 = -1 \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 180^{\circ}}\ (\textit{carece de sentido}) \end{cases}$$

<u>Solución: α = 60º.</u>

****