PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtener razonadamente:

a) Todos los valores de k para los que la matriz $B=A-k\cdot I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa de B cuando k = 3.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\cdot A^2+\beta\cdot A=-2\cdot I$.

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P=I-M$ cumple las relaciones $P^2=P$ y $M\cdot P=P\cdot M$.

----

a)

$$B=A-k\cdot I=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}=B}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=-k(3-k)+2=0\ ;;\ -3k+k^2+2=0\ ;;\ k^2-3k+2=0\ ;;\ k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow \underline{k_1=1}\ ;;\ \underline{k_2=2}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ B=A-k\cdot I\ \ tiene\ \ inversa\ \ \forall k\in R-\{1,\ 2\}}}$$

b)

Para k = 3 es $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para hallar B^{-1} empleamos el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2+3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}}.$$

c)

$$\alpha\cdot A^2+\beta\cdot A=-2\cdot I \Rightarrow \alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2+\beta\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;$$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;\ \alpha\cdot\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha \\ 3\alpha & 7\alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ;;\ \begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha-2\beta \\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha=1} \\ \underline{\beta=-3} \end{cases}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ que\ \ se\ \ verifique\ \ \alpha\cdot A^2+\beta\cdot A=-2\cdot I\ \ tiene\ \ que\ \ ser\ \ \alpha=1\ \ y\ \ \beta=-3}}$$

d)

Sea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; por definición tiene que ser $M^2=M \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;;\ \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=a\ \ (*) \\ ab+bd=b & \to b(a+d)=b \\ ac+cd=c & \to c(a+d)=c \\ bc+d^2=d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+d=1 ;;\ \underline{d=1-a} \Rightarrow \underline{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}}.$$

$$P=I-M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=P}.$$

$$P^2=P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;;\ \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2+bc & -b(1-a)-ab \\ -c(1-a)-ac & bc+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 1-2a+a^2+bc & -b+ab-ab \\ -c+ac-ac & bc+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} 1-2a+a^2+bc & -b \\ -c & bc+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2+bc=a \quad (*)$, la expresión anterior queda:

$$\begin{pmatrix} 1-2a+a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

<u>La igualdad anterior prueba que $P^2 = P$.</u>

Tenemos que probar que $M \cdot P = P \cdot M$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} a-a^2-bc & -ab+ab \\ c-ac-c+ac & -bc+a-a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-a^2-bc & b-ab-b+ab \\ -ac+ac & -bc+a-a^2 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\underline{\begin{pmatrix} a-a^2-bc & 0 \\ 0 & -bc+a-a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-a^2-bc & 0 \\ 0 & -bc+a-a^2 \end{pmatrix}}.$$

<u>La igualdad anterior prueba que M · P = P · M</u>

También se probaba de la siguiente forma:

$$M \cdot P = P \cdot M \;;;\; M \cdot (I-M) = (I-M)\cdot M \;;;\; M \cdot I - M^2 = I \cdot M - M^2 \;;;\; \underline{M - M^2 = M - M^2}$$

****

2º) En el espacio se dan las rectas $r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x+2y-1=0\\3y-z+2+\alpha=0\end{cases}$. Obtener razonadamente:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano.

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior.

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contenga al punto P(1, 2, 1).

----

a)

Para que las rectas r y s estén contenidas en un plano en los casos siguientes: que sean coincidentes, que sean paralelas o que sean secantes.

Es evidente que las rectas no son coincidentes, por lo cual el estudio se hace para el caso de paralelas o secantes.

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}\;;;\;\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}2x-6=y+1\\x-3=z-2\end{cases}\;;;\;\underline{r\equiv\begin{cases}2x-y-7=0\\x-z-1=0\end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{array}{r}2x-y=7\\x-z=1\\x+2y=1\\3y-z=-2-\alpha\end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&-1\\1&2&0\\0&3&-1\end{pmatrix}\;y\;M'=\begin{pmatrix}2&-1&0&7\\1&0&-1&1\\1&2&0&1\\0&3&-1&-2-\alpha\end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M’, la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M’ = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$Rango\ \ M\ \Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1+4=5\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=3}.$$

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2-\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 3+\alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= +1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 3+\alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6+14-(3+\alpha)+21+1-4(3+\alpha) = 30-5(3+\alpha) = 30-15-5\varepsilon = 15-5\alpha =$$

$$=5(3-\alpha)=0 \Rightarrow \underline{\alpha=3}.$$

Para α ≠ 3 → Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 → Las rectas r y s se cruzan.

Para α = 3 → Rango M = Rango M' = 3 → Las rectas r y s se cortan en un punto.

<u>Las rectas r y s están contenidas en un plano para α = 3.</u>

b)

Para α = 3 la recta s es $s \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ 3y-z=-5 \end{cases}$. Un punto de s es A(1, 0, 5).

Un punto y un vector director de $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ son B(3, -1, 2) y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 1)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -1,\ -3)$.

La ecuación general del plano π que contiene a las rectas r y s es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -(x-1)-3y+4(z-5)+(z-5)+6(x-1)-2y=0\ ;;$$

$$5(x-1)-5y+5(z-5)=0\ ;;\ x-1-y+z-5=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-y+z-6=0}}$$

c)

La ecuación del haz de planos perpendiculares a la recta r tiene como vector normal al vector director de r, por lo que su expresión es de la forma $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto P(1, 2, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \ ;;\ 6 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -6}.$$

$$\underline{\underline{El\ \ plano\ \perp\ a\ \ r\ \ que\ \ contiene\ \ a\ \ P(1,\ 2,\ 1)\ \ es\ \ \mu \equiv x + 2y + z - 6 = 0}}$$

****

3º) Dada la función f definida por $f(x)=x^2 \cdot e^{-x}$. Obtener razonadamente:

a) El dominio y las asíntotas de la función f(x).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f(x).

c) Los valores de x donde la función $f(x)=x^2 \cdot e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión.

d) La gráfica de la curva $y=x^2 \cdot e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal.

----

a)

La función está definida para cualquier valor real de x: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x \to \infty} f(x)=\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\underline{0}.$$

$$y=k=\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x}=\lim_{x \to \infty} \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}}=\underline{+\infty}.$$

<u>El semieje positivo OX es asíntota horizontal de f(x).</u>

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$e^x \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow$ <u>No tiene asíntotas verticales</u>.

Oblicuas: Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.

<u>La función f(x) no tiene asíntotas oblicuas.</u>

b)

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f(x).

Una función es creciente o decreciente en su dominio cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x}-x^{2}\cdot e^{x}}{e^{2x}}=\frac{2x-x^{2}}{e^{x}}=\frac{x(2-x)}{e^{x}}=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=2}$$

Por ser $e^{x}\neq 0,\ \forall x\in R$, las raíces encontradas dividen el dominio de f(x), que es R, en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes, por lo cual, basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo $(0,\ 2)$, (al que pertenece el valor sencillo x = 1):

$$f'(1)=\frac{2-1}{e^{1}}=\frac{1}{e}>0\ .$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ x\in(0,\ 2)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Decrecimiento:\ x\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)}}$$

c)

La función $f(x)=x^{2}\cdot e^{-x}$ tiene puntos de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^{x}-x(2-x)\cdot e^{x}}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^{2}}{e^{x}}=\underline{\frac{x^{2}-4x+2}{e^{x}}}\ .$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{x^{2}-4x+2}{e^{x}}=0\ ;;\ x^{2}-4x+2=0\ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=2\pm\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=2-\sqrt{2}}\ ;;\ \underline{x_2=2+\sqrt{2}}\ .$$

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)=x^{2}\cdot e^{-x}\ \ tiene\ \ puntos\ \ de\ \ inflexión\ \ para\ \ x=2-\sqrt{2}\ \ y\ \ para\ \ x=2+\sqrt{2}}}$$

d)

La explicación adecuada para el cálculo de la asíntota horizontal está detallada en el apartado a).

Aunque no se pide y con objeto de facilitar la representación gráfica, vamos a determinar los máximos y mínimos relativos de la función.

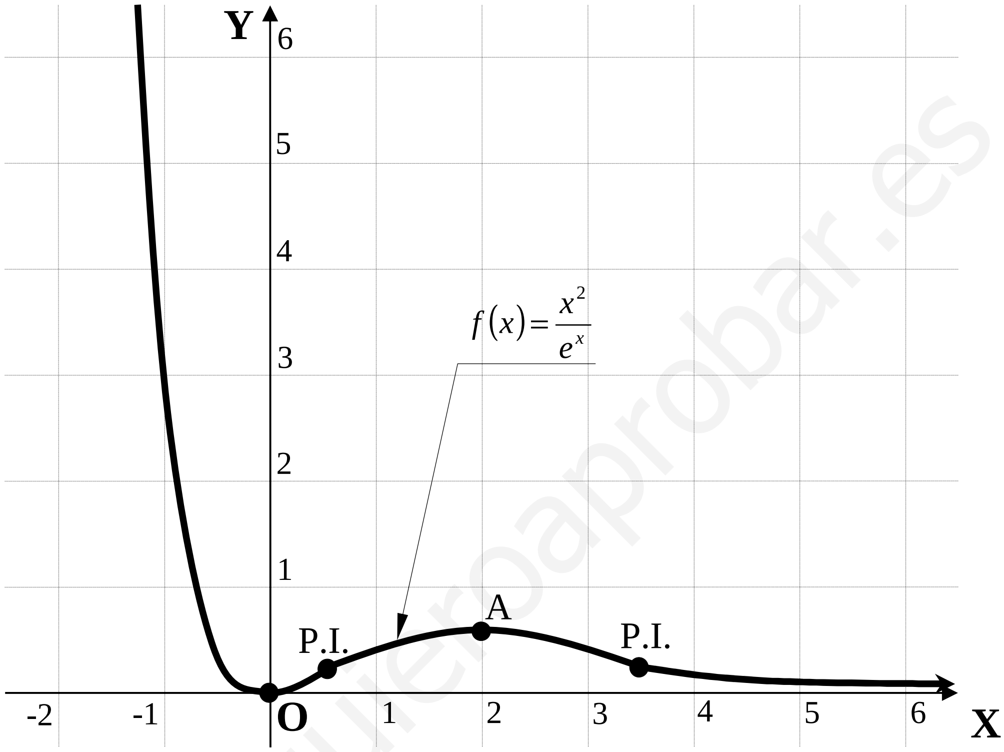
Un máximo relativo existe para los valores de x que cumplen que: $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)<0 \end{cases}$.

Un mínimo relativo existe para los valores de x que cumplen que: $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)>0 \end{cases}$.

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=2}\ .$$

$$f''(x)=\frac{x^2-4x+2}{e^x}\ \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=\dfrac{2}{e^0}=2>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ relativo\ \Rightarrow\ O(0,\ 0)} \\ \\ f''(2)=\dfrac{4-8+2}{e^2}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ relativo\ \Rightarrow\ A\left(2,\ \dfrac{4}{e^2}\right)} \end{cases}.$$

Con los datos obtenidos puede dibujarse, aproximadamente. la gráfica de f(x), que es la siguiente.



****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcular razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$ b) M^4 c) $T \cdot M^3 \cdot T^{-1}$.

----

a)

El producto (o cociente) de una matriz por un número real distinto de cero es otra matriz cuyos elementos resultan de multiplicar (o dividir) todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número real.

Teniendo en cuenta lo anterior y la propiedad de los determinantes que dice que si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican (o dividen) por un número real el valor del determinante queda multiplicado (o dividido) por dicho número, y que el rango de T es 3:

$$\left|\frac{1}{2}T\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot|T|=\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{8}=\left|\frac{1}{2}T\right|}}.$$

a)

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2+4-2-1+4=10-4=\underline{6=|M|}.$$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices:

$$|M^4|=|M\cdot M\cdot M\cdot M|=|M|\cdot|M|\cdot|M|\cdot|M|=(|M|)^4=6^4=\underline{\underline{1.296=|M^4|}}.$$

c)

Sabiendo que $|A^{-1}|=\left|\frac{1}{A}\right|=\frac{1}{|A|}$, y teniendo en cuenta los apartados anteriores:

$$|T\cdot M^3\cdot T^{-1}|=\sqrt{2}\cdot 6^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=6^3=\underline{\underline{216=|T\cdot M^3\cdot T^{-1}|}}.$$

****

2º) Se da la recta $r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x+y+\alpha z-2-6\alpha=0$, dependiente del parámetro α. Obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto P(1, 1, 0).

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r.

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r.

----

a)

La ecuación del plano π_α que pasa por el punto P(1, 1, 0) es la que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x+y+\alpha z-2-6\alpha=0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow (2+2\alpha)\cdot 1+1+\alpha\cdot 0-2-6\alpha=0 \ ;;$$

$$2+2\alpha+1+0-2-6\alpha=0 \ ;;\ 1-4\alpha=0 \ ;;\ \underline{\alpha=\frac{1}{4}}.$$

$$\pi_\alpha \equiv \left(2+2\cdot\frac{1}{4}\right)x+y+\frac{1}{4}z-2-6\cdot\frac{1}{4}=0 \ ;;\ \pi_\alpha \equiv \left(2+\frac{1}{2}\right)x+y+\frac{1}{4}z-2-\frac{3}{2}=0 \ ;;$$

$$\pi_\alpha \equiv \frac{5}{2}x+y+\frac{1}{4}z-\frac{7}{2}=0 \ ;;\ \Rightarrow \underline{\underline{\pi_\alpha \equiv 10x+4y+z-14=0}}.$$

b)

Una recta y un plano son paralelos cuando el sistema que forman es incompatible, o sea, que el rango de la matriz de coeficientes es dos y el rango de la matriz ampliada es tres.

El sistema que forman la recta y el plano es $\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \\ \pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x+y+\alpha z-2-6\alpha=0 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha & 2+6\alpha \end{pmatrix}.$$

$$Rango\ \ M=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2+2\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \alpha+4(2+2\alpha)+1=0\ ;;\ \alpha+8+8\alpha+1=0\ ;;$$

$9\alpha+9=1\ ;;\ \alpha+1=0 \Rightarrow \underline{\alpha=-1}$.

Vamos a justificar que para α = -1 es Rango M' = 3:

$$Para\ \ a=-1\ es\ \ M'=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3,\ c.q.j.}$

Para α = -1 es $\pi_\alpha \equiv (2-2)x+y-z-2+6=0$. El plano pedido es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi_\alpha \equiv y-z+4=0}}$$

c)

La recta $r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente al producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -4,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ -1)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4i+k+j=4i+j+k=\underline{(4,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{v_r}}\ .$$

Para que el plano $\pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x+y+\alpha z-2-6\alpha=0$ sea perpendicular a la recta r, su vector normal tiene que ser linealmente dependiente del vector director de r; el vector normal del plano es $\overrightarrow{n_\pi}=(2+2\alpha,\ 1,\ \alpha)$. Las componentes de los vectores tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2+2\alpha}{4}=\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{1} \Rightarrow \underline{\alpha=1}.$$

Para α = 1 es $\pi_\alpha \equiv (2+2)x+y+z-2-6=0$.

La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi_\alpha \equiv 4x+y+z-8=0}}$$

****

3º) Un coche recorre el arco de una parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto A(0, 9) al punto P(x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener razonadamente:

a) La expresión de $f(x)$.

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia a $f(x)$ tiene mínimos relativos.

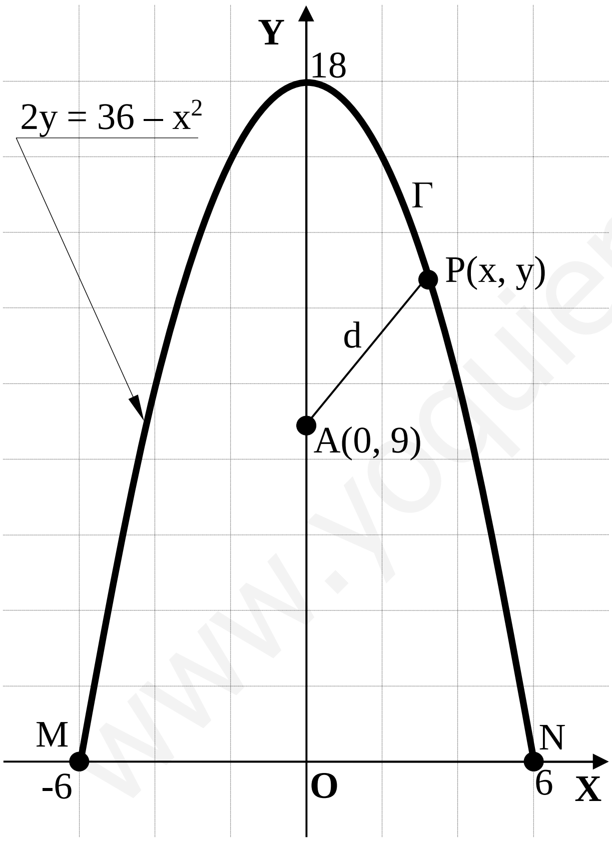
c) Los valores máximo y mínimo de la distancia a $f(x)$.

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos M(-6, 0) y N(6, 0).

----

a)

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.



La expresión del punto P(x, y) es de la forma $P\left(x,\ \frac{36-x^2}{2}\right)$.

La expresión de la distancia d del punto A(0, 9) al punto genérico del arco de parábola Γ, que es la función a determinar, es la siguiente:

$$d = f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{36-x^2}{2} - 9\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{36-x^2-18}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{18-x^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{324-36x^2+x^4}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2+324-36x^2+x^4}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4-32x^2+324}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{x^4-32x^2+324} = f(x)}}.$$

b)

Los puntos del arco Γ donde la distancia a $f(x)$ tiene mínimos relativos son los valores de x que anulan la derivada de f(x):

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^3-64x}{2\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\underline{\frac{x(x^2-16)}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x^2-16)}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=0 \;;;\; x(x^2-16)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=-4} \;;;\; \underline{x_3=4}.$$

Para encontrar los mínimos relativos recurrimos a la segunda derivada, que tiene que ser positiva para los valores que anulan la primera derivada:

$$f''(x)=\frac{(3x^2-16)\cdot\sqrt{x^4-32x^2+324}-x(x^2-16)\cdot\frac{4x^3-64x}{2\sqrt{x^4-32x^2+324}}}{\left(\sqrt{x^4-32x^2+324}\right)^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-16)\cdot\sqrt{x^4-32x^2+324}-\frac{x(x^2-16)\cdot 4x(x^2-16)}{2\sqrt{x^4-32x^2+324}}}{x^4-32x^2+324}=$$

$$=\frac{(3x^2-16)\cdot\sqrt{x^4-32x^2+324}-\frac{2x^2(x^2-16)^2}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}}{x^4-32x^2+324}=$$

$$=\frac{(3x^2-16)(x^4-32x^2+324)-2x^2(x^2-16)^2}{(x^4-32x^2+324)\sqrt{x^4-32x^2+324}}=f''(x).$$

$$f''(0)=\frac{-16\cdot 324-0}{324\sqrt{324}}=-\frac{16}{18}=-\frac{8}{9}<0 \Rightarrow \text{Para máximo.}$$

$$f''(4)=\frac{(48-16)(256-32\cdot 16+324)-32(16-16)^2}{(256-32\cdot 16+324)\sqrt{256-32\cdot 16+324}}=\frac{32\cdot(580-512)-0}{68\sqrt{68}}>0 \Rightarrow \text{Para mínimo.}$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje Y de la función, los puntos de distancia mínimo del arco Γ son los siguientes:

$$2y_{(4)}=2y_{(-4)}=36-4^2=36-16=20 \;;;\; \underline{y_{(4)}=y_{(-4)}=10} \Rightarrow \underline{\underline{B(-4,\ 10)}} \;;;\; \underline{\underline{C(4,\ 10)}}.$$

c)

El valor máximo se produce para x = 0 y la distancia máxima es la siguiente:

$$f(0)=\frac{1}{2}\sqrt{324}=\frac{1}{2}\cdot 18=9 \Rightarrow \underline{\underline{d_{máx}=9\ \ unidades}}.$$

Los valores mínimos se producen para x = ±4 y la distancia es la siguiente:

$$f(4)=f(-4)=\frac{1}{2}\sqrt{72}=\frac{1}{2}\sqrt{36\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}\ \Rightarrow \underline{\underline{d_{mín}=3\sqrt{2}\ \ unidades}}.$$

d)

El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos M(-6, 0) y N(6, 0) es, considerando la simetría de la figura, la siguiente:

$$2y=36-x^2\ \Rightarrow\ y=18-\frac{1}{2}x^2.$$

$$S=2\cdot\int_0^6\left(18-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot dx=2\cdot\left[18x-\frac{x^2}{4}\right]_0^6=2\cdot\left[\left(18\cdot 6-\frac{6^2}{4}\right)-0\right]=2\cdot\left(108-\frac{36}{4}\right)=$$

$$=2\cdot(108-9)=2\cdot 99=\underline{\underline{198\,u^2=S}}.$$

****