

**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)****UNIVERSIDADES DE VALENCIA****JULIO – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

**OPCIÓN A**

1º) Dado el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a - 1)y + z = 0 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}$ , donde  $a$  es un parámetro

real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro  $a$  para los cuales el sistema es compatible.

b) Las soluciones del sistema cuando  $a = 1$ .

c) Las soluciones del sistema cuando  $a = 0$ .

-----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a - 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $a$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a =$$

$$= a^2 - 3a + 2 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

Para  $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{L_1 = L_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para  $a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para  $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

El sistema es compatible  $\forall a \in R - \{2\}$ .

b)

Para  $a = 1$  el sistema resulta  $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ , equivalente al sistema  $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ , que es compatible indeterminado; haciendo  $y = \lambda$ :  $x = 1 - \lambda$ .

Solución:  $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R$ .

c)

Para  $a = 0$  el sistema resulta  $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ , que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Solución:  $x = y = z = \frac{1}{2}, \forall \lambda \in R$ .

\*\*\*\*\*

2º) Se tiene el plano  $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ , la recta  $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  y el punto  $A(1, 1, 1)$ . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La recta  $r$  que pasa por  $A$ , corta a la recta  $s$  y es paralela al plano  $\pi$ .

b) El plano  $\beta$  que pasa por  $A$ , es perpendicular al plano  $\pi$  y paralelo a la recta  $s$ .

c) Discute si el punto  $P(3, 2, 1)$  está en la recta  $t$  paralela a  $s$  que pasa por  $Q(5, 3, 1)$ .

a)

La expresión de  $s$  por unas ecuaciones paramétricas es  $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ .

Un punto genérico de  $s$  es  $B(2\lambda, \lambda, 0)$ .

Un vector director de  $r$  es:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = [(2\lambda, \lambda, 0) - (1, 1, 1)] = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1).$$

Un vector normal del plano  $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$  es  $\vec{n} = (1, -1, 1)$ .

Por ser la recta  $r$  paralela al plano  $\pi$ , el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0; \quad 2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0;$$

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}_r = (2 \cdot 1 - 1, 1 - 1, -1) = (1, 0, -1).$$

La expresión de  $r$  dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = 1 - \mu \end{cases}}.$$

b)

Un vector director de la recta  $s$  es  $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$ .

El plano  $\beta$ , por ser perpendicular a  $\pi$ , tiene como vector director al vector normal de  $\pi$  y, por ser paralelo a la recta  $s$ , también tiene como vector director al vector director de  $s$ . La expresión general de  $\beta$  es la siguiente:

$$\beta(A; \vec{n}, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(y - 1) + (z - 1) + 2(z - 1) - (x - 1) = 0;$$

$$-(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0; -x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0.}$$

c)

La recta  $t$  paralela a  $s$  que pasa por  $Q(5, 3, 1)$  es  $t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\delta \\ y = 3 + \delta \\ z = 1 \end{cases}$ .

Para que el punto  $P(3, 2, 1)$  pertenezca a la recta  $t$  tiene que satisfacer su ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\delta \\ y = 3 + \delta \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2\delta = 3 \\ 3 + \delta = 2 \end{cases} \Rightarrow \delta = -1 \Rightarrow P(3, 2, 1).$$

El punto  $P(3, 2, 1)$  está en la recta paralela a  $s$  que pasa por  $Q(5, 3, 1)$ .

\*\*\*\*\*

3º) Consideramos la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cdot \cos(\pi x)$ , que depende de los parámetros  $a, b, c$ . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La relación entre los coeficientes  $a, b, c$  sabiendo que  $f(x)$  toma el valor 22 cuando  $x = 1$ .

b) La relación que deben verificar los coeficientes  $a, b$  y  $c$  para que sea horizontal la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P$  de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto  $P$  es  $x = 1$ .

c)  $I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx.$

a)

$$f(1) = 22 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1) = 22;$$

$$a + b + c \cdot \cos \pi = 22; \quad a + b + c \cdot (-1) = 22 \Rightarrow \underline{a + b - c = 22}.$$

b)

El punto  $P$  tiene la siguiente expresión:  $P[1, f(1)] \approx P(1, 22)$ .

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual, por ser la recta horizontal es  $m = f'(1) = 0$ .

$$f(x) = 3ax^2 + 2bx + c \cdot [1 \cdot \cos(\pi x) + \pi x \cdot \text{sen}(\pi x)] =$$

$$= 3ax^2 + 2bx + c \cdot \cos(\pi x) + c \cdot \pi x \cdot \text{sen}(\pi x).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \cdot \cos(\pi \cdot 1) + c \cdot \pi \cdot 1 \cdot \text{sen}(\pi \cdot 1) = 0;$$

$$3a + 2b + c \cdot (-1) + c \cdot \pi \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{3a + 2b - c = 0}.$$

c)

$$I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(\pi x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot dx = \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi} \int \text{sen}(\pi x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x) = A.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = \left[ \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\ &= \left[ \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen} \pi + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos \pi \right] - \left[ \frac{0}{\pi} \cdot \text{sen} 0 + \frac{1}{\pi^2} \cos 0 \right] = 0 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos \pi - 0 - \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos 0 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) - \frac{1}{\pi^2} \cdot 1 = -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

$$\underline{I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = -\frac{2}{\pi^2}.}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

## OPCIÓN B

1º) Resolver los siguientes apartados, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Dados  $A$  y  $B$ , matrices cuadradas del mismo orden tales que  $AB = A$  y  $BA = B$ , deducir que  $A^2 = A$  y  $B^2 = B$ .

b) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , se pide encontrar los parámetros  $a, b$  para que la matriz  $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$  cumpla que  $B^2 = B$  pero  $AB \neq A$  u  $BA \neq B$ .

c) Sabiendo que  $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$ , obtener razonadamente el valor de los determinantes  $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$  y  $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ .

a)

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot B \cdot A = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B = \underline{A, c. q. d.}$$

$$B^2 = B \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot A \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot A = \underline{B, c. q. d.}$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \rightarrow a = 1, b = 0 \\ \textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \text{No vale.}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \Rightarrow \text{Si vale.}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B \Rightarrow \text{Si vale.}$$

Los valores que cumplen las condiciones pedidas son  $a = 0$  y  $b = 1$ .

c)

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = \underline{6}.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes de que si se multiplica o divide una línea de un determinante por un valor real, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho valor real.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = \underline{3}.$$

Se han utilizado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

1<sup>a</sup>.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2<sup>a</sup>.- Si un determinante tiene una línea que es combinación lineal de otras líneas su valor es cero. (en el 2<sup>o</sup> determinante la primera columna es la suma de las otras dos)

\*\*\*\*\*

2º) Dada la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ , se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$ .

b) La ecuación del plano  $\pi$  que es paralelo a la recta  $r$  y pasa por los puntos  $A(5, 0, 1)$  y  $B(4, 1, 0)$ .

c) La distancia entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$  obtenido en el apartado anterior.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \quad x = 3 - \lambda; \quad z = x + 4y - 8 =$$

$$= 3 - \lambda + 4\lambda - 8 = -5 + 3\lambda = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}.$$

b)

Un vector director de la recta  $r$  es  $\vec{v}_r = (-1, 1, 3)$ .

Los puntos  $A$  y  $B$  determinan el vector  $\vec{BA} = [A - B] = (1, -1, 1)$ .

La expresión general del plano  $\pi$  pedido es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{v}_r, \vec{BA}) \equiv \begin{vmatrix} x - 5 & y & z - 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 5) + 3y + (z - 1) - (z - 1) + 3(x - 5) + y = 0; \quad 4(x - 5) + 3y = 0;$$

$$(x - 5) + y = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 5 = 0}.$$

c)

Un vector normal del plano  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, 1, 0)$ .

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-1, 1, 3) \cdot (1, 1, 0) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{La recta } r \text{ es paralela al plano } \pi.$$

La distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$  es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de la recta  $r$  es  $P(3, 0, -5)$ .

La distancia de un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Aplicando la fórmula al punto  $P(3, 0, -5)$  y al plano  $\pi \equiv x + y - 5 = 0$ :

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|3 + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2} \text{ unidades}}}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

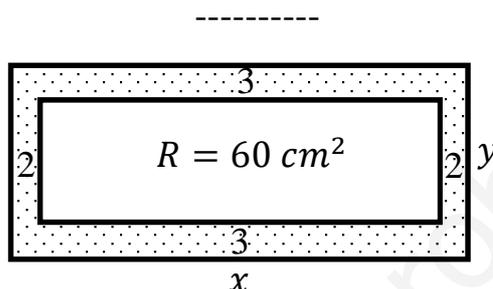
3º) Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo  $R$  de  $600 \text{ cm}^2$  de área de manera que por encima y por debajo de  $R$  deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de  $R$  deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El área de la cartulina en función de la base  $x$  del rectángulo  $R$ .

b) El valor de  $x$  para el cual el área de la cartulina es mínima.

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

a)



De la observación de la figura se deduce que:

$$(x - 4)(y - 6) = 600; \quad xy - 6x - 4y + 24 = 600; \quad xy - 6x - 4y = 576;$$

$$xy - 4y = 576 + 6x; \quad y(x - 4) = 576 + 6x \Rightarrow y = \frac{576+6x}{x-4}.$$

Sustituyendo el valor de  $y$  en la expresión de la superficie:

$$S(x, y) = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{576+6x}{x-4} = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}.$$

$$\underline{S(x) = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}}.$$

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = 6 \frac{(96+2x) \cdot (x-4) - (96x+x^2) \cdot 1}{(x-4)^2} = 6 \frac{96x-384+2x^2-8x-96x-x^2}{(x-4)^2} = 6 \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2} = 0; \quad x^2 - 8x - 384 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64+1.536}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{1.600}}{2} = \frac{8 \pm 40}{2} = 4 \pm 20 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -16 < 0 \\ x_2 = 24 \end{cases}.$$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual:  $x = 24$ .

Se justifica a continuación que el valor hallado es para mínimo:

$$S''(x) = 6 \frac{(2x-8) \cdot (x-4)^2 - (x^2-8x-384) \cdot [2(x-4) \cdot 1]}{(x-4)^4} = 6 \frac{(2x-8) \cdot (x-4) - 2(x^2-8x-384)}{(x-4)^3} =$$
$$= 6 \cdot \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+768}{(x-4)^3} = 6 \cdot \frac{800}{(x-4)^3} = \frac{5.400}{(x-4)^3}$$

$$S''(24) = \frac{5.400}{(24-4)^3} = \frac{540}{(20)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo, c. q. j.}$$

$$\underline{x = 24 \text{ cm.}}$$

c)

$$y = \frac{576+6 \cdot 24}{24-4} = \frac{576+144}{20} = \frac{720}{20} = 36.$$

La cartulina de área mínima tiene 24 cm de base y 36 cm de altura.

\*\*\*\*\*