

**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)****UNIVERSIDADES DE VALENCIA****JULIO – 2019**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

**OPCIÓN A**

1º) Se da el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 2x + 3z = a \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = a + 1 \end{cases}$ , donde  $a$  es un parámetro real. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:*

a) Los valores de  $a$  para los que el sistema es compatible determinado.

b) La solución del sistema cuando  $a = -1$ .

c) El valor de  $a$  para que el sistema tenga una solución  $(x, y, z)$  que verifique la ecuación  $x + y + z = 0$ .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & a \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & a + 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Ran } M = 3.$$

$$\underline{\underline{\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}}$$

b)

Se resuelve por Cramer sin particularizar el parámetro:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10a-15+6(a+1)+2a}{-1} = \frac{-8a-15+6a+6}{-1} = \frac{-2a-9}{-1} = 2a + 9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{50+6a+3(a+1)-45-4(a+1)-5a}{-1} = \frac{5+a-a-1}{-1} = \frac{4}{-1} = -4.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-4(a+1)-a+6a+10}{-1} = \frac{-4a-4+5a+10}{-1} = \frac{a+6}{-1} = -a - 6.$$

Solución para  $a = -1 \Rightarrow x = 7, y = -4, z = -5.$

c)

Teniendo en cuenta la solución teórica del apartado anterior:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow (2a + 9) - 4 + (-a - 6) = 0; 2a + 9 - 4 - a - 6 = 0;$$

$$a - 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

\*\*\*\*\*

2º) Se da el plano  $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$  y el punto  $P(10, 0, 10)$ . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La distancia del punto P al plano  $\pi$ .

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

a)

La distancia del punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ . Aplicando la fórmula al punto  $P(10, 0, 10)$  y al plano  $\pi \equiv 2x + y + 2z - 8 = 0$ :

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{32}{\sqrt{9}} = \frac{32}{3} \text{ unidades.}$$

b)

Los puntos de intersección del plano  $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$  con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$\text{Eje X} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0).$$

$$\text{Eje Y} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0).$$

$$\text{Eje Z} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2z = 8 \rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 8, 0) - (4, 0, 0)] = (-4, 8, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 4) - (4, 0, 0)] = (-4, 0, 4).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |32i + 32k + 16j| =$$

$$= |16i + 8j + 16k| = 8 \cdot |2i + j + 2k| = 8 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 8 \cdot \sqrt{9} = 24.$$

$$\underline{S_{ABC} = 24 u^2.}$$

c)

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan. Los puntos P, A, B y C determinan los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  y:

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(10, 0, 10) - (4, 0, 0)] = (6, 0, 10).$$

$$V_{PABC} = \frac{1}{6} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (192 + 320) = \frac{1}{6} \cdot 512.$$

$$\underline{V_{PABC} = \frac{512}{6} u^3 \cong 85,33 u^3.}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

3º) Se da la función  $h$  definida por  $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El dominio de la función  $h$ . Los límites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .

b) La asíntota de la curva  $y = h(x)$ .

c) La primitiva de la función  $h$  (es decir,  $\int h(x) \cdot dx$ ) y el área de la superficie encerrada entre las rectas  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$  y la curva  $y = h(x)$ .

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x + 5 = 0; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{+\infty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{-\frac{3}{5}.}$$

b)

La función  $h(x)$  no tiene asíntotas verticales por no anularse su denominador para ningún valor real de  $x$ . Tampoco tiene asíntotas horizontales por ser finito el límite de la función cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \infty$ .

Una función racional tiene una asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tal como ocurre con  $h(x)$ .

Las asíntotas oblicuas son de la forma  $y = mx + n$ , siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2-3}{x^2+2x+5} = -1.$$

Asíntota oblicua:  $y = x - 1$ .

c)

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo (1, 5) todas las ordenadas de la función  $h(x)$  son positivas.

$$S = \int_1^5 h(x) \cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx = && \begin{array}{r} +x^3 \quad -x^2 \quad +5x \quad -3 \\ -x^3 \quad -2x^2 \quad -5x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 \quad +2x \quad +5 \\ x \quad -1 \end{array} \right. \\ &= \int \left( x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \right) \cdot dx = && \begin{array}{r} -x^2 \quad -3 \\ +x^2 \quad +2x \quad +5 \\ 2x \quad +2 \end{array} \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x + 5 = t \\ (2x + 2) \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{t} \cdot dt = \\ &= \frac{x^2}{2} - x + Lt = \frac{x^2}{2} - x + L(x^2 + 2x + 5) = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 h(x) \cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x + L(x^2 + 2x + 5) \right]_1^5 = \\ &= \left[ \frac{5^2}{2} - 5 + L(5^2 + 2 \cdot 5 + 5) \right] - \left[ \frac{1^2}{2} - 1 + L(1^2 + 2 \cdot 1 + 5) \right] = \\ &= \frac{25}{2} - 5 + L40 - \frac{1}{2} + 1 - L8 = 12 - 4 + L \frac{40}{8} = 8 + L5. \end{aligned}$$

$$\underline{S = (8 + L5) u^2 \cong 9,61 u^2.}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de  $a$  para los que la ecuación matricial  $AX = aX$  solo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial  $AX = 5X$ .

c) Comprobar que  $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  es una solución de la ecuación matricial  $AX = 2X$  y, sin calcular la matriz  $A^{100}$ , obtener el valor de  $\beta$  tal que  $A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

a)

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} AX \\ aX \end{matrix}} \right\} \Rightarrow AX = aX \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y = ax \\ -x + 6y = ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - a)x + 4y = 0 \\ -x + (6 - a)y = 0 \end{cases}$$

Se ha obtenido un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema tendrá solución única (trivial) cuando el determinante de la matriz de coeficientes tenga rango 2, es decir, que su determinante sea distinto de cero.

$$\text{La matriz de coeficientes es } M = \begin{pmatrix} 1 - a & 4 \\ -1 & 6 - a \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 - a & 4 \\ -1 & 6 - a \end{vmatrix} = (1 - a)(6 - a) + 4 = 6 - a - 6a + a^2 + 4 = 0;$$

$$a^2 - 7a + 10 = 0; \quad a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$$

La ecuación matricial  $AX = aX$  tiene solución única  $\forall a \in R - \{2, 5\}$ .

b)

$$\text{Para } a = 5 \text{ el sistema resulta } \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + y = 0.$$

Solución:  $x = \lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R$ .

c)

Para  $a = 2$  el sistema resulta  $\left. \begin{array}{l} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x + 4y = 0$ .

*Solución:*  $x = 4\lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R$ , en particular para  $\lambda = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

---

Sabiendo que  $AX = 2X \Rightarrow A = 2$ , por lo cual:

$$A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\beta = 2^{100}}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se dan en el espacio la recta  $r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$  y el plano  $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ .

Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$  en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

b) La distancia entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$  cuando  $\alpha = 6$  y  $\beta = 3$ .

c) La ecuación del plano que pasa por  $O(0, 0, 0)$  y que no corta al plano  $\pi$ .

-----

a)

La recta  $r$  dada por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4x + 4a = -y \\ -4z = \beta y \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - 4a = 0 \\ \beta y + 4z = 0 \end{array} \right.$$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  determinan el sistema  $\left. \begin{array}{l} 4x - y = 4a \\ \beta y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{array} \right\}$ .

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & \beta & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de  $M$  y  $M'$  pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango  $M =$  Rango  $M' = 2 \Rightarrow$  La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango  $M = 2$ , Rango  $M' = 3 \Rightarrow$  La recta es paralela al plano.

3. -- Rango  $M =$  Rango  $M' = 3 \Rightarrow$  La recta es secante al plano.

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\beta - 4 - 32 = 12\beta - 36 = 0; \beta - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 3.$$

Para  $\left\{ \begin{array}{l} \beta \neq 3 \\ a \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son secantes.}$

$$\text{Para } \beta = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se determina el rango de  $M'$  por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 4a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & 4a - 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \rightarrow F_3 = -3F_2 \Rightarrow \text{Rang } M' = 2 \\ a \neq 6 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} \beta = 3 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow r \text{ est\u00e1 contenida en } \pi.$$

---

$$\text{Para } \begin{cases} \beta = 3 \\ a \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow r \text{ es paralela a } \pi.$$

---

b)

Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$$\text{Para } a = 6 \text{ y } \beta = 6 \Rightarrow r \text{ est\u00e1 contenida en } \pi \Rightarrow D(r, \pi) = 0$$

---

c)

Si dos planos no se cortan es que son paralelos.

El haz de planos  $\gamma$  paralelos a  $\pi$  es  $\gamma \equiv x + 2y + 3z + D = 0$  y el plano  $\delta$  pedido pertenece al haz  $\gamma$  y contiene al punto  $O(0, 0, 0)$ :

$$\underline{\delta \equiv x + 2y + 3z = 0.}$$

\*\*\*\*\*

3º) Un proyectil está unido al punto  $A(0, 2)$  por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva  $y = 4 - x^2$  de extremos  $B(-2, 0)$  y  $C(2, 0)$ . Obtener *razonadamente*, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La función de la variable  $x$  que expresa la distancia entre un punto cualquiera  $P(x, 4 - x^2)$  de la curva  $y = 4 - x^2$  y el punto  $A(0, 2)$ .

b) Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a mayor distancia absoluta del punto  $A(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .

c) Los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  a menor distancia del punto  $A(0, 2)$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas  $y = 4 - x^2$  e  $y = 2 - |x|$  cuando  $-2 \leq x \leq 2$ .

-----

a)

La función  $h(x)$  que expresa la distancia entre los puntos  $A(0, 2)$  y  $P(x, 4 - x^2)$  es la siguiente:

$$d(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

$$\underline{d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, \text{ con } -2 \leq x \leq 2.}$$

b)

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

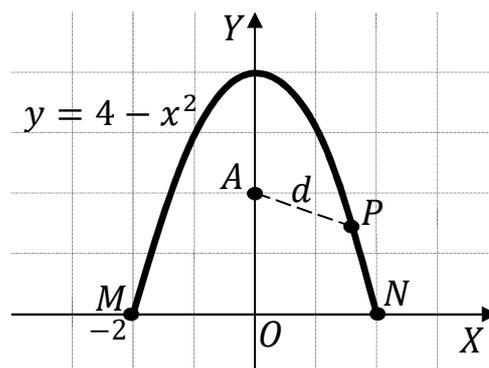
$$d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}.$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0; \quad x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En el caso que nos ocupa y, dada la complejidad de la segunda derivada, es más cómodo al cálculo de las sucesivas distancias para determinar la máxima.

Las distancias son las siguientes:

$$d(0) = \sqrt{4} = 2.$$



Por ser  $d(x)$  una función par:

$$d\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{6}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{6}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 4} = \sqrt{\frac{16-9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cong 1,23.$$

Los puntos de los extremos de la función son  $M(-2, 0)$  y  $N(2, 0)$ . La distancia del punto  $A(0, 2)$  a estos puntos es la siguiente:

$$d_{AM} = d_{AN} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2,83.$$

Los puntos más distantes de  $A(0, 2)$  son  $M(-2, 0)$  y  $N(2, 0)$ .

c)

Los puntos de la curva de distancia mínima a  $A(0, 2)$  son los siguientes:

$$y\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 4 - \frac{6}{4} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

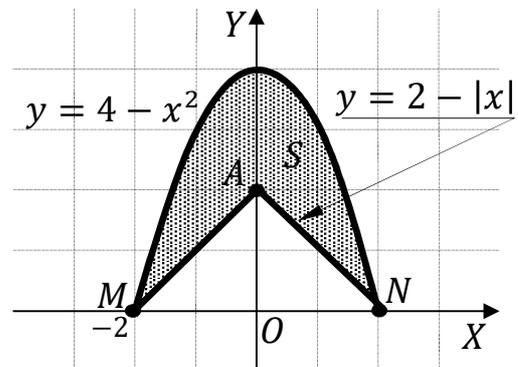
Los puntos más próximos de  $A(0, 2)$  son  $P\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$  y  $Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

d)

Teniendo en cuenta que  $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , la función  $y = 2 - |x|$  puede expresarse de la forma:  $y = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que son pares las funciones  $y = 4 - x^2$  e  $y = 2 - |x|$ , la superficie pedida es la siguiente:



$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^2 [(4 - x^2) - (2 - x)] \cdot dx = \\ &= 2 \int_0^2 (-x^2 + x + 2) \cdot dx = 2 \cdot \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2 \cdot \left[ \left( -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - 0 \right] = \\ &= 2 \cdot \left( -\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = 2 \cdot \left( 6 - \frac{8}{3} \right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{22}{3} u^2 \cong 7,33 u^2.}$$

\*\*\*\*\*