

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****JUNIO – 2021**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

1º) Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a .

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) + a(a+1) + 4 - 2(a^2 - 1) - 2a - 1 = \\ &= a - 1 + a^2 + a + 4 - 2a^2 + 2 - 2a - 1 = 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 2 + 12 + 2 + 1 = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = -2 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 6 - 8 - 1 + 3 = 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

b)

Se resuelve, en primer lugar, para $a \in R - \{-2, 2\}$, que el sistema resulta compatible determinado. Se utiliza el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & a-2 & -2a-1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(a+2)z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{a+2}.$$

$$(a-2)y + (1-a) \cdot \frac{4}{a+2} = -1; (a-2)y = -1 - \frac{4(1-a)}{a+2} = \frac{-a-2+4(a-1)}{a+2} = \frac{3a-6}{a+2};$$

$$(a-2)y = \frac{3(a-2)}{a+2} \Rightarrow y = \frac{3}{a+2}.$$

$$x + y + (a+1)z = 2; x = 2 - \frac{3}{a+2} - \frac{4(a+1)}{a+2} = \frac{2a+4-3-4a-4}{a+2} \Rightarrow x = \frac{-2a-3}{a+2}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{-2a-3}{a+2}; y = \frac{3}{a+2}; z = \frac{4}{a+2}, \forall a \in R - \{-2, 2\}.$$

b)

Se resuelve ahora para $a = 2$; el sistema resulta compatible indeterminado.

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases} . \text{ Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo}$$

la tercera, y haciendo $y = \lambda$, resulta: $z = 1$; $x = -1 - \lambda$.

Solución: $x = -1 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = 1, \forall \lambda \in R$.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sean los siguientes planos $\pi_1: x + y + z = a - 1$; $\pi_2: 2x + y + az = a$ y $\pi_3: x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a .
- b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .
- c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.
2. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)
3. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.
4. -- $\text{Rang } M = 1$; $\text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)
5. -- $\text{Rang } M = 2$; $\text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2 = 0;$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

$\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3$ los planos secantes; se cortan en un punto.

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Hay planos secantes.}$$

$$\text{Los planos } \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos y secantes con } \pi_2.$$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en una recta.}$$

b)

Como se ha visto en el apartado anterior, los planos π_1 y π_3 son paralelos, por lo cual:

$$\text{No existe recta de corte de } \pi_1 \text{ y } \pi_3.$$

c)

Para $a = 2$ los planos π_1 y π_2 son: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$, que determinan la recta siguiente:

$$\pi_2 - 2\pi_1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

3º) Consideremos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función f .

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$,

c) La integral $I = \int f(x) \cdot dx$.

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-2, 0\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \underline{\text{La recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\text{Las rectas } x = -2 \text{ y } x = 0 \text{ son asíntotas verticales.}}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot [x \cdot (x+2)] - (x-1) \cdot [1 \cdot (x+2) + x \cdot 1]}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x - (x-1)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-2(x-1)(x+1)}{x^2(x+2)^2} = \\ &= \frac{x^2+2x-2(x^2-1)}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2+2}{x^2(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Por ser $x^2(x+2)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, $f'(x)$ será positiva o negativa cuando sea positivo o negativo la expresión $-x^2 + 2x + 2$.

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 2 = 0; \quad x^2 - 2x - 2 = 0; \quad x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \\ &= 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Siendo la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 , que corta el eje de abscisas en los puntos $P_1(1 - \sqrt{3}, 0)$ y $P_2(1 + \sqrt{3}, 0)$. Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty).}$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1 - \sqrt{3}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{3}).}$$

c)

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx.$$

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A+B=1 \\ 2A=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{2} + B = 1 \Rightarrow B = \frac{3}{2}.$$

$$I = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx = \int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} \right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L|x| + \frac{3}{2} \cdot L|x+2| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx = L \left| \sqrt{\frac{(x+2)^3}{x}} \right| + C.}$$

4º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Explicad cuándo la matriz A es invertible.

c) Resolver la ecuación $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad, en el caso de $m = 1$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = -m(m^2 + 1) - 2m^2 = -m^3 - m - 2m^2 =$$

$$= -m(m^2 + 2m + 1) = -m(m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 0.$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

$$\text{Para } \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{\text{La matriz } A \text{ es invertible } \forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}.$$

c)

$$X \cdot A = I; \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}; \quad X \cdot I = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$$

Se obtiene la inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan.

$$\text{Para } m = 1 \text{ es } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow -F_1\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 5F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ F_3 \rightarrow \frac{1}{4}F_3 \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

5º) Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calcular la distancia del punto P al plano π .

b) Calcular el punto P' que es simétrico de P respecto del plano π .

c) Calcular la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .

a)

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(1, 2, 3)$ y al plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$:

$$d(A, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{14}}.$$

$$\underline{d(P, \pi) = \sqrt{14} \text{ unidades.}}$$

b)

La recta t que pasa por $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n} = (3, 2, 1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

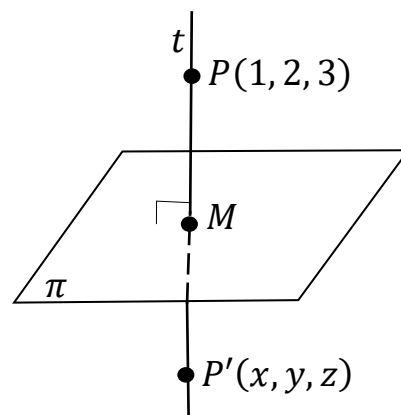
El punto M , intersección del plano π con la recta t es el siguiente:

$$\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \quad t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + 4 = 0;$$

$$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0; \quad 15 + 15\lambda = 0;$$

$$1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2, 0, 2).$$



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(-2, 0, 2) - (1, 2, 3)] = (-3, -2, -1).$$

$$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (-2, 0, 2)] = (x + 2, y, z - 2).$$

$$(-3, -2, -1) = (x + 2, y, z - 2) \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = -3 \rightarrow x = -5 \\ y = -2 \\ z - 2 = -1 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P'(-5, -2, 1)}.$$

c)

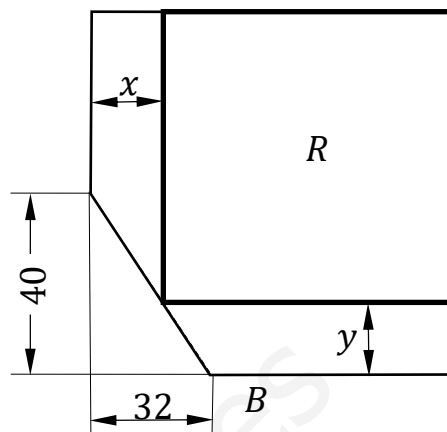
El haz de planos α , paralelos a π tiene la expresión $\alpha \equiv 3x + 2y + z + D = 0$. De los infinitos planos del haz α , el plano π' que contiene al punto P' , es el que satisface su ecuación:

$$\alpha \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \Bigg\}_{P'(-5, -2, 1)} \Rightarrow 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) + 1 + D = 0;$$

$$-15 - 4 + 1 + D = 0; \quad D - 18 = 0 \Rightarrow D = 18.$$

$$\underline{\pi' \equiv 3x + 2y + z + 18 = 0.}$$

6º) Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm, respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto $P(x, y)$. Véase la figura adjunta.



a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida en función de x , para $0 \leq x \leq 32$.

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

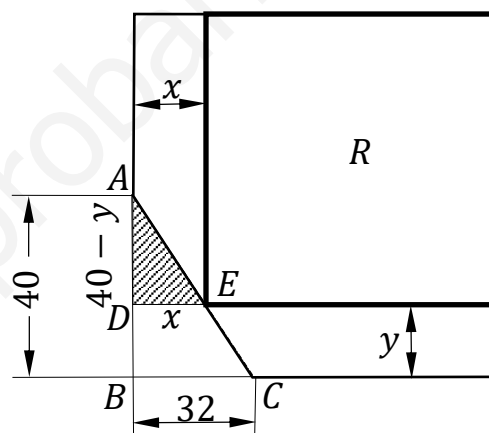
c) Calculad el valor de dicha área máxima.

a)

Para expresar el valor de y en función de x se tiene en cuenta que los triángulos rectángulos ABC y ADE son semejantes por lados paralelos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{40}{32} = \frac{40-y}{x}; \quad \frac{5}{4} = \frac{40-y}{x};$$

$$5x = 160 - 4y \Rightarrow y = \frac{160-5x}{4}.$$



$$R = (80 - x)(80 - y) \Rightarrow R(x) = (80 - x) \left(80 - \frac{160-5x}{4} \right) =$$

$$= (80 - x) \left(\frac{320-160+5x}{4} \right) \Rightarrow R(x) = \frac{1}{4} \cdot (80 - x)(160 + 5x).$$

b)

Para que el área sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = \frac{1}{4} [-1 \cdot (160 + 5x) + (80 - x) \cdot 5] = \frac{1}{4} (-160 - 5x + 400 - 5x) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (240 - 10x) \Rightarrow S'(x) = \frac{5}{2} \cdot (24 - x).$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot (24 - x) = 0; \quad 24 - x = 0 \Rightarrow x = 24;$$

$$S''(x) = \frac{5}{2} \cdot (-1) = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = 24.$$

$$y = \frac{160-5x}{4} \Rightarrow x = 24 \Rightarrow y = \frac{160-5 \cdot 24}{4} = y = \frac{160-120}{4} = y = \frac{40}{4} = 10.$$

$$80 - 24 = 56; \quad 80 - 10 = 70.$$

El área R es máxima cuando sus dimensiones son 56×70 cm.

c)

$$R = x \cdot y = 56 \cdot 70 = 3.920.$$

El área máxima de R es de 3.920 cm^2 .

www.yoquieroaprobar.es