PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) María tiene el doble de dinero que Pol y Júlia juntos. Pol tiene la sexta parte de dinero que María. Júlia tiene el doble de dinero que Pol. María tiene el triple de dinero que Júlia.

a) Con estos datos, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno de ellos? Halle el conjunto de soluciones posibles.

b) Si Pol tiene 35 euros, ¿cuánto dinero tienen María y Júlia?

----

a)

Sean x, y, z las cantidades respectivas de María, Pol y Júlia.

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 \cdot (y+z) \\ y = \frac{x}{6} \\ z = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x = 2y + 2z \\ 6y = x \\ z = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z = 0 \\ x - 6y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}.$$

Por ser un sistema homogéneo admite la solución trivial $x = 0, y = 0, z = 0$; si además el sistema admite otras soluciones es compatible indeterminado. Para resolverlo, se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $y = \lambda$: $x = 6\lambda, z = 2\lambda$.

$$S.C.I \Rightarrow \underline{No\ puede\ saberse\ cuanto\ dinero\ tiene\ cada\ uno}.$$

b)

$Para\ y = 35\ es\ x = 210\ y\ z = 70.$

$$\underline{María\ tiene\ 210\ euros, Pol\ 35\ euros\ y\ Júlia, 70\ euros}.$$

****

2º) Una empresa vende un producto a un precio de p euros. El número de unidades vendidas depende del precio que fijemos según la función: $V(p) = \frac{30p+10}{p}$.

a) Demuestre que, al aumentar los precios, las ventas disminuyen.

b) ¿Es posible que la empresa venda 20 unidades del producto? Si el precio aumenta indefinidamente, ¿qué pasará con las ventas?

----

a)

Demostrar que al aumentar los precios disminuyen las ventas es equivalente a demostrar que la función $V(p)$ es decreciente.

Una función es decreciente cuando su derivada es negativa.

$$V'(p) = \frac{30 \cdot p - (30p+10) \cdot 1}{p^2} = \frac{30p - 30p - 10}{p^2} = \frac{-10}{p^2} < 0, \forall p \in R.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ al\ aumentar\ los\ precios\ disminuyen\ las\ ventas}.$

b)

$$V(p) = 20 \Rightarrow \frac{30 \cdot p + 10}{p} = 20;\ \ 30p + 10 = 20p;\ \ 10p = -1; p = -\frac{1}{10}.$$

No es posible que el precio del producto sea negativo, por eso:

$\underline{No\ es\ posible\ que\ la\ empresa\ venda\ 20\ unidades\ del\ producto.}$

$$\lim_{p \to \infty} V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{30p+10}{p} = 30.$$

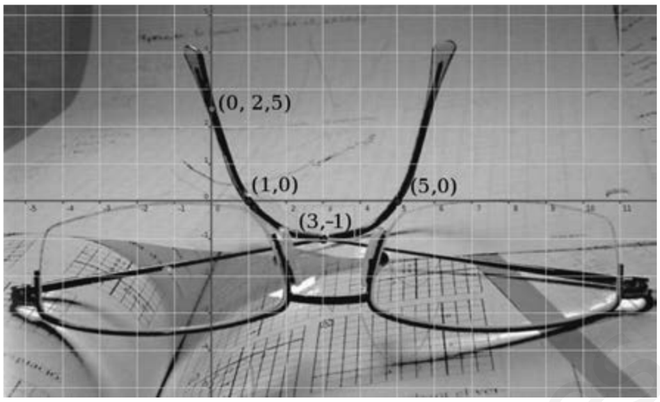
$\underline{Si\ el\ precio\ crece\ indefinidamente\ las\ ventas\ se\ estabilizan\ en\ 30\ unidades}.$

$$V(p) = 30 \Rightarrow \frac{30 \cdot p + 10}{p} = 30;\ \ 30p + 10 = 30p;\ \ 10 = 0\ ??.$$

$\underline{Si\ el\ precio\ crece\ indefinidamente\ la\ empresa\ en\ inviable}.$

****

3º) La siguiente fotografía matemática parece indicar que las patillas de las gafas forman una parábola. Sin embargo, no todas las curvas en forma de U son parás. Hemos marcado sobre unos ejes de coordenadas algunos de los puntos: $A(0, 2'5)$, $B(1, 0), C(3, -1)\ y\ D(5, 0)$.



Justifique si la gráfica corresponde o no a una parábola.

Si la función es una parábola, su eje es la mediatriz del segmento $\overline{BD}$, por tener ambos puntos la misma ordenada.

La mediatriz del segmento de extremos $B(1, 0)\ y\ D(5, 0)$ es la recta vertical de ecuación $y = 3$.

El punto $C(3, -1)$, por pertenecer a la recta $y = 3$ es el vértice de la supuesta parábola.

Conociendo tres puntos de una parábola puede obtenerse su ecuación, teniendo en cuenta que su expresión general es $y = ax^2 + bx + c$:

$B(1,0) \Rightarrow 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c;\ \ a + b + c = 0.$ (1)

$D(5,0) \Rightarrow 0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c;\ \ 25a + 5b + c = 0.$ (2)

$C(3,-1) \Rightarrow -1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c;\ \ 9a + 3b + c = -1.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -1 \end{array}\right\}$. Restando la primera ecuación a las demás:

$\left.\begin{array}{r} 24a + 4b = 0 \\ 8a + 2b = -1 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 24a + 4b = 0 \\ -16a - 4b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = 2;\ \ a = \frac{1}{4}.$

$8a + 2b = -1;\ \ 8 \cdot \frac{1}{4} + 2b = -1;\ \ 2 + 2b = -1;\ \ 2b = -3;\ \ b = -\frac{3}{2}.$

$a + b + c = 0;\ \ \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + c = 0;\ \ 1 - 6 + 4c = 0;\ \ 4c = 5;\ \ c = \frac{5}{4}.$

La ecuación de la supuesta parábola es $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$

La función será una parábola si su expresión satisface al punto $A(0, 2'5)$:

$A(0, 2'5) \Rightarrow 2{,}5 = \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{5}{4};\ \ 2{,}5 = \frac{5}{4}??.$

$\underline{La\ gráfica\ dada\ no\ corresponde\ a\ una\ parábola.}$

****

4º) a) La matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es la siguiente: $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Justifique, sin resolverlo, si el sistema es incompatible, compatible indeterminado o determinado.

b) Considere ahora la matriz de otro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Justifique si es incompatible o compatible y, en este último caso, resuélvalo.

Por ser el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y teniendo en cuenta que el teorema de Rouché-Fröbenius, que dice que un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, el sistema será compatible determinado si el rango de la matriz de coeficientes es tres.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Sien do $|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3$.

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado.}$$

b)

Siendo las matrices de coeficientes y ampliada $A\ y\ A'$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado.}$$

Para resolver el sistema se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera, resultando el sistema $\left.\begin{array}{l} x+z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z=\lambda$;

$$\left.\begin{array}{l} x+\lambda=2 \\ x+y-\lambda=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2-\lambda;\;\; 2-\lambda+y-\lambda=1;\;\; y=-1+2\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=2-\lambda, y=-1+2\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R}.$$

****

5º) Considere la función $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

a) Determine los puntos donde la función f corta cada uno de los ejes. Determine también los intervalos donde la función f es positiva.

b) Determine los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f es horizontal.

----

a)

Cortes con el eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+3}=0;\ \ x+1=0;\ \ x=-1 \Rightarrow \underline{A(-1,\ 0)}$.

Corte con el eje Y: $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{B\left(0,\ \frac{1}{3}\right)}$.

Teniendo en cuenta que $x^2+3>0, \forall x \in R$, la función $f(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $x+1$.

Considerando que el dominio de la función es R:

$$\underline{f(x)<0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)}. \qquad \underline{f(x)>0 \Rightarrow x \in (-1,+\infty)}.$$

b)

La pendiente de una recta horizontal es cero.

La pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2+3-2x^2-2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=0;\ \ -x^2-2x+3=0;\ \ x^2+2x-3=0;$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2 \Rightarrow x_1=-3, x_2=1.$$

Los puntos de tangencia pedido son los siguientes:

$$f(-3)=\frac{-3+1}{(-3)^2+3}=\frac{-2}{9+3}=-\frac{1}{6} \ \Rightarrow\ \underline{P\left(-3,-\frac{1}{6}\right)}.$$

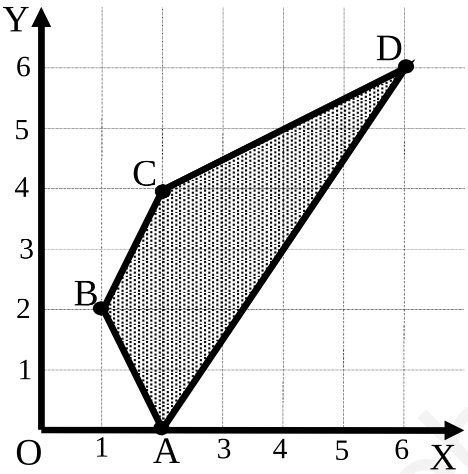
$$f(1)=\frac{1+1}{1^2+3}=\frac{2}{1+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \underline{Q\left(1,\frac{1}{2}\right)}.$$

****

6º) Considere el cuadrilátero de la figura adjunta.

a) Defina las condiciones que deben cumplir los puntos del cuadrilátero sombreado, incluyendo la frontera.

b) Justifique analíticamente si el punto $P(4,3)$ pertenece al cuadrilátero.



----

a)

Las ecuaciones de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 que determinan el cuadrilátero de la figura son las siguientes, recordando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

$$r_1 \Rightarrow \overline{AB} \Rightarrow \frac{y-0}{2-0} = \frac{x-2}{1-2};\ -y = 2x - 4 \Rightarrow r_1 \equiv y = -2x + 4.$$

$$r_2 \Rightarrow \overline{BC} \Rightarrow \frac{y-4}{2-4} = \frac{x-2}{1-2};\ -y + 4 = -2x + 4 \Rightarrow r_2 \equiv y = 2x.$$

$$r_3 \Rightarrow \overline{CD} \Rightarrow \frac{y-6}{4-6} = \frac{x-6}{2-6};\ -4y + 24 = -2x + 12 \Rightarrow r_3 \equiv y = \frac{x+6}{2}.$$

$$r_4 \Rightarrow \overline{DA} \Rightarrow \frac{y-6}{0-6} = \frac{x-6}{2-6};\ -4y + 24 = -6x + 36 \Rightarrow r_4 \equiv y = \frac{3x-6}{2}.$$

Las expresiones de las correspondientes inecuaciones de las rectas, teniendo en cuenta que contienen a los puntos indicados, son las siguientes:

$\underline{i_1 \Rightarrow O(0,0) \to No \Rightarrow y \geq -2x + 4.}$ $\underline{i_2 \Rightarrow M(1,0) \to Si \Rightarrow y \leq 2x.}$

$\underline{i_3 \Rightarrow O(0,0) \to Si \Rightarrow y \leq \frac{x+6}{2}.}$ $\underline{i_4 \Rightarrow O(0,0) \to Si \Rightarrow y \geq \frac{3x-6}{2}.}$

b)

Para que el punto $P(4,3)$ pertenezca a la zona factible es necesario que satisfaga las inecuaciones que la determinan:

$i_1 \Rightarrow y \geq -2x + 4 \Rightarrow P(4,3) \Rightarrow 3 \geq -2 \cdot 4 + 4 \rightarrow \underline{Si}$

$i_2 \Rightarrow y \leq 2x \Rightarrow P(4,3) \Rightarrow 3 \leq 2 \cdot 4 \rightarrow \underline{Si}$

$i_3 \Rightarrow y \leq \frac{x+6}{2} \Rightarrow P(4,3) \Rightarrow 3 \leq \frac{4+6}{2} \rightarrow \underline{Si}$

$i_4 \Rightarrow y \geq \frac{3x-6}{2} \Rightarrow P(4,3) \Rightarrow 3 \geq \frac{3 \cdot 4-6}{2} \rightarrow \underline{Si}$

$$\underline{El\ punto\ P(4,3)\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible}.$$

****