PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg de ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo hay que fabricar para maximizar los ingresos?

Sean x e y el número de kilos de helados de los tipos G1 y G2 que se fabrican, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deducen las restricciones que se imponen, que se expresan en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 90 \\ 2x+y\leq 150 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=10x+15y$.

$① \Rightarrow x+2y\leq 90 \Rightarrow y\leq \frac{90-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	90
y	45	0

$② \Rightarrow 2x+y\leq 150 \Rightarrow y\leq 150-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	30	50
y	90	50

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

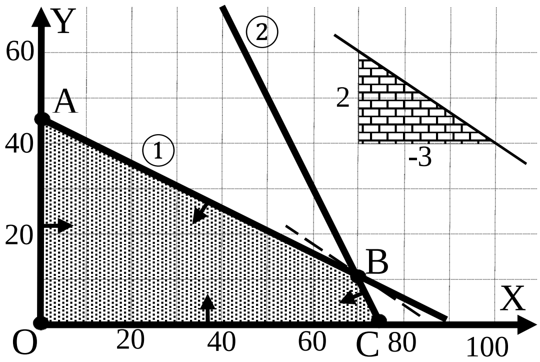
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 45).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 90 \\ 2x + y = 150 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x - 2y = -90 \\ 4x + 2y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 210; \;\; x = 70 \Rightarrow B(70, 10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow C(75, 0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 45) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 0 + 675 = 675.$

$B \Rightarrow f(70, 10) = 10 \cdot 70 + 15 \cdot 10 = 700 + 150 = 850.$

$C \Rightarrow f(75, 0) = 10 \cdot 75 + 15 \cdot 0 = 750 + 0 = 750.$

El máximo se produce en el punto $B(70, 10)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 10x + 15y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{15}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{\frac{2}{3}}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ fabricando\ 70\ cajas\ de\ G1\ y\ 10\ de\ G2.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 850\ euros.}$

****

2º) Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y tiene 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.

a) Expresar el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre las dos variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios?

b) Determinar en qué precio hay que fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso?

----

a)

Sean x el número de euros que se sube (o baja) la cuota.

$Ingresos = Número\ usuarios \times valor\ de\ la\ cuota \Rightarrow$

$\Rightarrow 42 \cdot 2.000 = N(x) \cdot (42 + x) \Rightarrow \underline{N(x) = \frac{84.000}{x+42}}.$

$N(x) = 0 \Rightarrow \frac{84.000}{x+42} \neq 0, \forall x \in R.$

Para que el número de usuarios sea cero es necesario que el valor de la cuota sea infinito.

$\underline{El\ gimnasio\ nunca\ (en\ teoría)\ se\ queda\ \text{sin}\ usuarios}.$

b)

Los ingresos que se obtienen en función del valor de la cuota y el número de usuarios son los siguientes:

$I(x) = (42 + x)(2.000 - 20x) = 84.000 - 840x + 2.000x - 20x^2 =$

$= -20x^2 + 1.260x + 84.000.$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = -40x + 1.260.$

$I'(x) = 0 \Rightarrow -40x + 1.260 = 0;\ -x + 31,5 = 0 \Rightarrow x = 31,5.$

$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ con\ una\ cuota\ mensual\ de\ 73,5\ euros}.$

$I(31,5) = -20 \cdot 31,5^2 + 1.260 \cdot 31,5 + 84.000 =$

$= -19.845 + 39.690 + 84.000 = 123.690 - 19.845 = 103.845.$

$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ mensuales\ son\ 103.845\ euros}.$

****

3º) Consideremos la función $f(x)$ tal que su primera derivada es la siguiente: $f'(x) = x^2 + bx - 3$, en donde b es un parámetro real.

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Para $b = -8$, se encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(0, 2)$.

----

a)

Por tener un extremo relativo para $x = -3 \;\Rightarrow\; f'(-3) = 0$:

$f'(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^2 + b \cdot (-3) - 3 = 0;\;\; 9 - 3b - 3 = 0;\;\; 6 - 3b = 0;$

$2 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 2}.$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$f'(x) = x^2 + 2x - 3 \;\Rightarrow\; f''(x) = 2x + 2.$

$f''(-3) = 2 \cdot (-3) + 2 = -6 + 2 = -4 < 0.$

$$\underline{Para\ x = -3\ la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo}.$$

b)

Para $b = -8$ la función derivada es $f'(x) = x^2 - 8x - 3.$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$m = f'(0) = -3.$ El punto de tangencia es $P(0, 2).$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -3 \cdot (x - 0) = -3x.$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 3x + y - 2 = 0}.$$

****

4º) Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10 %, del 8 % y del 4 %, respectivamente. Teniendo en cuenta que quiere obtener una rentabilidad del 7 %.

a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero?

b) En cuanto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos?

----

a)

Sean x, y, z las cantidades que se invierten en letras, bonos y acciones, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6.000 \\ 0{,}1x+0{,}08y+0{,}04z=6.000\cdot 0{,}07 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=6.000 \\ 10x+8y+4z=42.000 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6.000 \\ 5x+4y+2z=21.000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x=6.000-y-z \\ \rightarrow x=\frac{21.000-4y-2z}{5} \end{array} \Rightarrow 6.000-y-z=\frac{21.000-4y-2z}{5};$$

$$30.000-5y-5z=21.000-4y-2z;\ \ 9.000-y-3z=0 \Rightarrow \underline{y=9.000-3z}.$$

$$x=6.000-y-z=6.000-(9.000-3z)-z \Rightarrow \underline{x=2z-3.000}.$$

$$\underline{\textit{La posible inversión en acciones oscila entre } 0 \textit{ y } 1.500 \textit{ euros}.}$$

En caso de una inversión mayor de 1.500 euros, la inversión en letras (x) sería negativa, en contra de las condiciones impuestas.

b)

Siendo $x=y+z$ el sistema resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6.000 \\ 10x+8y+4z=42.000 \\ x=y+z \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=6.000 \\ 10x+8y+4z=42.000 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Sumando a la tercera ecuación la primera:

$$2x=6.000 \Rightarrow x=3.000.$$

$$\left.\begin{array}{r} y+z=3.000 \\ 30.000+8y+4z=42.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+z=3.000 \\ 8y+4z=12.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -y-z=-3.000 \\ 2y+z=3.000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0; \;\; z=3.000.$$

$$\underline{Debe\ invertir\ 3.000\ euros\ en\ letras, 0\ en\ bonos\ y\ 3.000\ en\ acciones.}$$

****

5º) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $A^3 - I = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz nula de orden 2.

b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado anterior.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^3 - I = O.}$$

b)

$$A^{11} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = I \cdot I \cdot I \cdot A^2 = A^2.$$

$$\underline{A^{11} = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.}$$

****

6º) El vértice de una parábola es el punto $V(1, 2)$.

a) Si la parábola corta el eje de las abscisas por un punto $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de las abscisas?

b) Encuentre la ecuación de la parábola.

----

a)

Si la parábola tiene por vértice al punto $V(1, 2)$ y corta al eje de abscisas tiene que ser, necesariamente cóncava $(\cap)$, por lo cual, el coeficiente de x^2 en su expresión general es negativo.

Un una parábola su eje de simetría el la recta vertical que pasa por su vértice; en el caso que nos ocupa, el eje es la recta $x = 1$.

El punto pedido es el simétrico de $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ con respecto a la recta $x = 1$:

$$\underline{B\left(\frac{5}{2}, 0\right)}.$$

b)

Existen diversas formas de hallar la ecuación de la parábola, una de ellas es la siguiente.

Sea la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$.

Como se conocen tres puntos y se tienen tres incógnitas, basta con hacer que se cumpla la función en los tres puntos:

$V(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2.$ (1)

$A\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + c = 0;\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 0;$

$a - 2b + 4c = 0.$ (2)

$B\left(\frac{5}{2}, 0\right) \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + c = 0;\ \frac{25a}{4} + \frac{5b}{2} + c = 0;$

$25a + 10b + 4c = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$\left.\begin{array}{r} a+b+c=2 \\ a-2b+4c=0 \\ 25a+10b+4c=0 \end{array}\right\}$. Restando la primera ecuación multiplicada por 4 a las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3a-6b=-8 \\ 21a+6b=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow 18a=-16;\ \ 9a=-8 \Rightarrow a=-\frac{8}{9}.$$

$$-3\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)-6b=-8;\ \ \frac{8}{3}-6b=-8;\ \ 8-18b=-24;\ \ 18b=32 \Rightarrow b=\frac{16}{9}.$$

$$-\frac{8}{9}+\frac{16}{9}+c=2;\ -8+16+9c=18;\ \ 9c=10 \Rightarrow c=\frac{10}{9}.$$

$$\underline{La\ parábola\ es\ y=f(x)=-\frac{8}{9}x^2+\frac{16}{9}x+\frac{10}{9}}.$$

****