PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine el valor de a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.

b) Determine el valor de a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, siendo M^{-1} la matriz inversa de M. Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

----

a)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4 - a^2 = 3 \\ a^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$

$$\underline{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \; para \; a = -1 \; y \; para \; a = 1.}$$

b)

$$M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = I; \; \begin{pmatrix} -a & 2 + 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -1.$

$$\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; para \; a = -1.}$$

****

2º) Considere la función $f(x)=\frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) Busque para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$.

b) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde alcanza los máximos y mínimos relativos de la función f.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y+3x+5=0$ es $y=-3x-5 \Rightarrow m=-3$.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-a)-x^2\cdot 1}{(x-a)^2}=\frac{2x^2-2ax-x^2}{(x-a)^2}=\frac{x^2-2ax}{(x-a)^2}.$$

$$m=f'(1)=-3 \Rightarrow \frac{1^2-2a\cdot 1}{(1-a)^2}=\frac{1-2a}{(1-a)^2}=-3;\ \ 1-2a=-3(1-2a+a^2);$$

$$1-2a=-3+6a-3a^2;\ \ 3a^2-8a+4=0;\ \ a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=$$

$$=\frac{4\pm 2}{3} \Rightarrow \underline{a_1=\frac{2}{3}}\ y\ \underline{a_2=2}.$$

b)

Para $a=1$ la función resulta: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Como quiera que el denominador de la primera derivada es siempre positivo en el dominio de la función, que $D(f) \Rightarrow R-\{1\}$, la derivada será positiva o negativa cuando lo sea el numerador $x(x-2)$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0;\ \ x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=2.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(0,1) \cup (1, 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - x(x-2)\cdot[2(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(2, 4)}.$$

****

3º) Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martín, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 euros. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helados se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado separadamente?

----

a)

Sean x, y, z lo que cuesta un refresco, un bocadillo y una bola de helado, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ 6x+5y+8z=N \end{array}\right\}.$$

El rango de la matriz A de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 32+50+36-30-40-48 = 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que el sistema sea compatible es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales, por lo cual, $Rang\ A' = 2$.

Procediendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 19{,}5 \\ 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 4 & 3 & 5 & 19{,}5 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \\ 0 & 1 & 1 & 3{,}3 \\ 0 & 2 & 2 & N-24{,}3 \end{pmatrix} \Rightarrow N - 24{,}3 = 2 \cdot 3{,}3 = 6{,}6;\ \ N = 30{,}9.$$

$$\underline{Han\ pagado\ en\ total\ 30{,}9\ euros.}$$

$b)$

El nuevo sistema de ecuaciones que resulta es: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ x+y+z=5{,}10 \end{array}\right\}$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 19{,}5 & 3 & 5 \\ 8{,}1 & 1 & 2 \\ 5{,}1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 195 & 3 & 5 \\ 81 & 1 & 2 \\ 51 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4+10+6-5-8-6}=\frac{\frac{1}{10}\cdot(195+306+405-255-390-243)}{1}=$$

$$=\frac{906-888}{10}=\frac{18}{10}=1{,}8.$$

$$y=\begin{vmatrix} 4 & 19{,}5 & 5 \\ 2 & 8{,}1 & 2 \\ 1 & 5{,}1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 195 & 5 \\ 2 & 81 & 2 \\ 1 & 51 & 1 \end{vmatrix}=\frac{324+510+390-405-408-390}{10}=$$

$$=\frac{834-813}{10}=\frac{21}{10}=2{,}1.$$

$$z=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 19{,}5 \\ 2 & 1 & 8{,}1 \\ 1 & 1 & 5{,}1 \end{vmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 195 \\ 2 & 1 & 81 \\ 1 & 1 & 51 \end{vmatrix}=\frac{204+390+243-195-324-306}{10}=$$

$$=\frac{837-825}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2.$$

$\underline{Un\ refresco\ vale\ 1{,}8\ euros,un\ bocadillo\ 2{,}1\ euros\ y\ una\ bola\ 1{,}2\ euros.}$

****

4º) Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una pieza determinada, que llamaremos A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza, en cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 euros por el modelo A y 50 euros para el modelo B.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora se deberán fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

----

a)

Sean $x\ e\ y$ el número de piezas de los modelos A y B que se fabrican, respectivamente.

$$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,y)=40x+50y.}$$

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ 2x+3y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

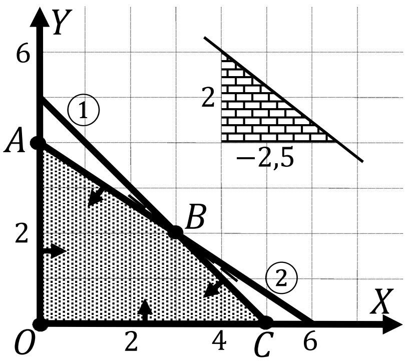
① $\Rightarrow x+y\le 5\Rightarrow y\le 5-x\Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	5
y	5	0

② $\Rightarrow 2x+3y\le 12\Rightarrow y\ge \frac{12-2x}{3}\Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	6
y	4	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\}\Rightarrow A(0,4).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-10 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\}\Rightarrow y=2;\ \ x=3\Rightarrow B(3,2).$$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=5 \end{array}\right\}\Rightarrow C(5,0).$$

b)

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,4) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 0 + 200 = 200.$

$B \Rightarrow f(3,2) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 120 + 100 = 220.$

$C \Rightarrow f(5,0) = 40 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El mínimo se produce en el punto $B(3,2)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 40x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{50}x = -\frac{4}{5}x = -\frac{2}{2{,}5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2{,}5}.$

$\underline{Beneficio\ máximo: fabricando\ por\ hora\ 3\ piezas\ tipo\ A\ y\ 2\ tip0\ B.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ por\ hora\ es\ de\ 220\ euros.}$

****

5º) Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 euros. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y que la relación entre estas dos variables es lineal, de manera que por cada 10 euros que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 euros de descuento sobre el precio inicial de 750 euros la compran 100 clientes más.

a) Deducir que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$.

b) Hallar cuál debe ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que produce los ingresos máximos y el valor de estos ingresos máximos.

----

a)

Sean $10x$ los euros que sube o baja el precio de los teléfonos

El precio por unidad es $p = 750 + 10x \Rightarrow x = \frac{p-750}{10}$.

El número de compradores es de $N = 2.000 - 100x$.

$$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(p) = \left(2.000 - 100 \cdot \frac{p-750}{10}\right) \cdot p = [2.000 - 10 \cdot (p - 750)] \cdot p =$$

$$= (2.000 - 10p + 7.500) \cdot p = (-10p + 9.500) \cdot p.$$

$$\underline{En\ efecto: la\ función\ ingresos\ es\ I(p) = -10p^2 + 9.500p.}$$

b)

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$$I'(p) = -20p + 9.500 = 0;\ 2p = 950 \Rightarrow p = 475.$$

$$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ los\ móviles\ a\ 475\ euros.}$$

$$I(475) = -10 \cdot 475^2 + 9.500 \cdot 475 = 4.750 \cdot (-475 + 950) =$$

$$= 4.750 \cdot 475 = 2.256.250.$$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 2.256.250\ euros.}$$

****

6º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde t mide el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué número la población será inferior a un millón de individuos?

b) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

----

a)

$$P(0)=\frac{5}{(0+1)^2}=5.$$

$$P(9)=\frac{5+9^2}{(9+1)^2}=\frac{5+81}{10^2}=\frac{86}{100}=0{,}86.$$

$$\underline{Al\ comienzo\ había\ 5.000.000\ de\ individuos\ y\ a\ los\ 9\ años, 860.000}$$

b)

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{5+t^2}{(t+1)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+5}{t^2+2t+1}=1.$$

$$\underline{Con\ el\ paso\ de\ los\ años\ se\ estabiliza\ la\ población\ en\ 1.000.000\ individuos.}$$

****