PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2019

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Queremos enviar una fecha codificada. Para hacerlo, se considera el vector de tres componentes $X=(d,m,a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente hacemos la operación $X\cdot A+B$, donde $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $B=(5,-5,5)$. El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

a) Si la fecha que queremos enviar es el uno de enero de 2.019, es decir, si el vector es $X=(1,1,2019)$, ¿qué vector codificado enviaremos (Y)?

b) Si el vector codificado que nos ha llegado es $Y=(2036,1,-13)$, ¿qué fecha es sin codificar?

----

a)

$$X\cdot A+B=Y \Rightarrow (1,1,2019)\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}+(5,-5,5)=$$

$$=(2010,1,-2)+(5,-5,5)=\underline{(2015,-4,3)}.$$

b)

$$X\cdot A+B=Y;\;\; X\cdot A=Y-B;\;\; X\cdot A\cdot A^{-1}=(Y-B)\cdot A^{-1};$$

$$X\cdot I=(Y-B)\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{X=(Y-B)\cdot A^{-1}}.$$

$$Y-B=(2036,1,-13)-(5,-5,5)=(2031,6,-18).$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (Y - B) \cdot A^{-1} = (2031, 6, -18) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{(12, 6, 2019)}.$$

****

2º) Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 euros por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 euros y el número de patinetes vendidos es lineal, por cada 50 euros de rebaja en el precio de venta de caca patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.

a) Escribe la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaja en 50 euros el precio inicial de 1.000 euros del patinete.

b) Encuentre cual ha de ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con ese precio.

----

a)

Sea x el número de veces que rebaja el precio de los patinetes.

El precio por unidad es $p = 1.000 - 50x$.

El número de patinetes vendidos es de $N = 40 + 10x$.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(x) = (1.000 - 50x) \cdot (40 + 10x) = 50 \cdot (20 - x) \cdot 10 \cdot (4 + x) =$

$= 500 \cdot (80 + 20x - 4x - x^2) = 500 \cdot (-x^2 + 16x + 80).$

$\underline{La\ función\ ingresos\ es\ I(x) = 500 \cdot (-x^2 + 16x + 80)}.$

b)

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = 500 \cdot (-2x + 16) = 1.000 \cdot (-x + 8) = 0 \Rightarrow x = 8.$

Se rebaja el precio 8 veces en 50 euros: 400 euros.

$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ los\ patinetes\ a\ 600\ euros.}$

El número de patinetes vendidos para el mayor ingreso es $N = 40 + 10 \cdot 8 =$

$= 40 + 80 = 120.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 120\ patinetes.}$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 120 \cdot 600 = 72.000\ euros.}$

****

3º) Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, viene dado por la función $P(t)=\frac{t^2+28}{(t+2)^2}$, donde t es el tiempo en años desde el momento actual $(t=0)$.

a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo.

b) ¿En qué momento el número de habitantes será mínimo? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona?

----

a)

$$P(0)=\frac{0^2+28}{(0+2)^2}=\frac{28}{4}=7.$$

$\underline{El\ número\ de\ habitantes\ de\ la\ zona\ inicialmente\ es\ de\ 7\ millones}.$

$$\lim_{t\to\infty} P(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+28}{(t+2)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+28}{t^2+4t+4}=1.$$

$\underline{A\ largo\ plazo\ el\ número\ de\ habitantes\ tiende\ a\ ser\ de\ un\ millón.}$

b)

Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(t)=\frac{2t\cdot(t+2)^2-(t^2+28)\cdot[2\cdot(t+2)\cdot 1]}{(t+2)^4}=\frac{2t\cdot(t+2)-2\cdot(t^2+28)}{(t+2)^3}=\frac{2t^2+4t-2t^2-56}{(t+2)^3}=$$

$$=\frac{4t-56}{(t+2)^3}.$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{4t-56}{(t+2)^3}=0;\ \ 4t-56=0;\ \ t-14=0\Rightarrow t=14.$$

$$P''(t)=\frac{4\cdot(t+2)^3-(4t-56)\cdot[3\cdot(t+2)^2\cdot 1]}{(t+2)^6}=\frac{4\cdot(t+2)-3\cdot(4t-56)}{(t+2)^4}=\frac{4t+8-12t+168}{(t+2)^4}=$$

$$=\frac{176-8t}{(t+2)^4}.$$

$$P''(14)=\frac{176-8\cdot 14}{(14+2)^4}=\frac{176-112}{16^4}=\frac{64}{16^4}>0\Rightarrow Mínimo\ para\ t=14.$$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ habitantes\ de\ la\ zona\ se\ tiene\ a\ los\ 14\ años}.$

$P(14)=\frac{14^2+28}{(14+2)^2}=\frac{196+28}{16^2}=\frac{224}{256}=0,875.$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ habitantes\ de\ la\ zona\ es\ de\ 875.000}.$

De la observación de todo lo anterior se deduce que:

$\underline{El\ número\ máximo\ de\ habitantes\ de\ la\ zona\ es\ ahora: 7\ millones}.$

****

4º) En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la media del total de personas que la aceraron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron en el primer sorteo supera en 11 al total de personas que acertaron en el segundo y el tercer sorteo juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos.

Sean x, y, z los acertantes de los últimos tres sorteos de la Lotto 6/49, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=51 \\ z=\frac{x+y}{2} \\ x-11=y+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=51 \\ 2z=x+y \\ x-y-z=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=51 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=11 \end{array}\right\}.$$

Sumando a la primera ecuación la tercera resulta: $2x=62;\ \ x=31.$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones segunda y tercera:

$$\left.\begin{array}{r} 31+y-2z=0 \\ 31-y-z=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y-2z=-31 \\ -y-z=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow -3z=-51;\ \ z=17.$$

$x+y+z=51;\ \ 31+y+17=51;\ \ y+48=51 \Rightarrow y=3.$

$\underline{En\ el\ primer\ sorteo\ hubo\ 31\ acertantes, en\ el\ segundo\ 3\ y\ en\ el\ tercero, 17.}$

****

5º) Considere una función $f(x)$ que tiene como primera derivada $f'(x)=2x^2+bx+4$, donde b es un parámetro real.

a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo relativos.

b) Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $P(0,3)$, halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto.

----

a)

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int(2x^2+bx+4)\cdot dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+4x+C.$$

Por tener $f(x)$ un extremo relativo para $x=-1$ es $f'(-1)=0$.

$$f'(-1)=0\Rightarrow 2\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+4=0;\ \ 2-b+4=0\Rightarrow \underline{b=6}.$$

La derivada resulta $f'(x)=2x^2+6x+4$.

La función resulta $f(x)=\frac{2x^3}{3}+3x^2+4x+C$.

Una función tiene un extremo relativo (máxima o mínimo) cuando se anula su primera derivada:

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x^2+6x+4=0;\ \ x^2+3x+2=0;\ \ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$=\frac{-3\pm1}{2}\Rightarrow x_1=-1,x_2=-2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=4x+6\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\to 4\cdot(-1)+6=2>0\Rightarrow Mínimo\\ x_2=-2\to 4\cdot(-2)+6=-2<0\Rightarrow Máximo\end{cases}.$$

$$\underline{Para\ x=-1\ la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo.}$$

b)

Por pasar la función $f(x)$ por el punto $P(0,3)$ es $f(0)=3\Rightarrow C=3$.

Finalmente, la función es $f(x)=\frac{2x^3}{3}+3x^2+4x+3$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$m \Rightarrow f'(0) = 4.$

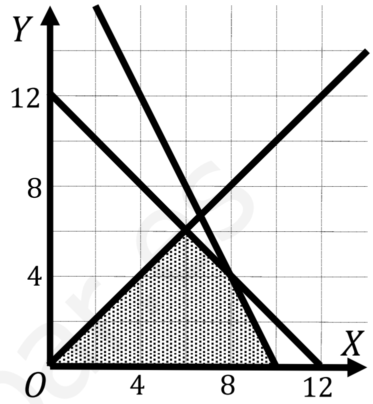
La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 3)$ con $m = 4$ es:

$y - 3 = 4(x - 0) = 4x.$

$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv 4x - y + 3 = 0}.$

****

6º) Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, integral y de cereales. En la elaboración, además de la harina correspondiente, lleva masa madre y agua. La cantidad de masa madre y agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata del integral o de cereales. Queremos saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la región siguiente con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales, y el eje de las y, el número de panecillos de cereales.

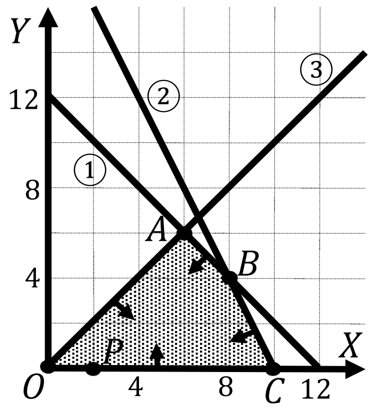
a) Escribe las inecuaciones que dan lugar a esta región factible.

b) Si los panecillos integrales se venden a 8 euros cada unidad y los de cereales a 10 euros, ¿cuántos panecillos de cada tipo se deben vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos?

----

a)

Con objeto de facilitar la comprensión del apartado se ilustra la figura de la forma en que aparece.



La recta ① tiene de pendiente $m = -1$ y pasa por el punto $A(6, 6)$ y le pertenece el origen:

$$y - 6 = -1 \cdot (x - 6) = -x + 6.$$

La recta ② tiene de pendiente $m = -2$ y pasa por el punto $B(8, 4)$ y le pertenece el origen.

$$y - 4 = -2 \cdot (x - 8) = -2x + 16.$$

La recta ③ tiene de pendiente $m = 1$ y pasa por el punto $A(6, 6)$ y le pertenece el punto $P(2, 0)$:

$$y - 6 = 1 \cdot (x - 8) = x - 6.$$

El sistema de inecuaciones que definen el problema es: $\underline{\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 20 \\ x - y \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}}$.

b)

La función de objetivos es $f(x) = 8x + 10y$.

① $\Rightarrow x + y \leq 12 \Rightarrow y \leq 12 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	12
y	12	0

② $\Rightarrow 2x + y \leq 20 \Rightarrow y \leq 20 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	10	5
y	0	10

③ $\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow P(2,0) \rightarrow Si.$

x	0	12
y	0	12

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 12;\;\; x = 6 \Rightarrow A(6,6).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ 2x + y = 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -12 \\ 2x + y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 8; y = 4 \Rightarrow B(8,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow C(10,0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,6) = 8 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 48 + 60 = 108.$

$B \Rightarrow f(8,4) = 8 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 64 + 40 = 104.$

$C \Rightarrow f(10,0) = 8 \cdot 10 + 10 \cdot 0 = 80 + 0 = 80.$

El valor máximo se produce en el punto $B(8,4)$.

$\underline{Máximos\ ingresos: vendiendo\ 6\ panecillos\ integrales\ y\ 6\ de\ cereales.}$

$\underline{Los\ máximos\ ingresos\ son\ de\ 108\ euros.}$

****