PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información. Puede utilizar tantos decimales como considere conveniente, sin embargo, aconsejamos hacerlo con dos decimales.

1º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para que valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10. \quad A^t = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -2 & -x \end{pmatrix}; \;\; Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}}{-x^2+10} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-x^2+10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = -A \Rightarrow \frac{1}{-x^2+10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{-x^2+10} = 1; \; -x^2 + 10 = 1;$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x_1 = -3, x_2 = 3}.$$

Otra forma de hacer este ejercicio es la siguiente:

$$A^{-1} = -A; \;\; A^{-1} \cdot A = -A \cdot A; \;\; I = -A^2 \Rightarrow A^2 = -I.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 10 & 0 \\ 0 & x^2 - 10 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = -I \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 10 & 0 \\ 0 & x^2 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 - 10 = -1; \;\; x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = -3, x_2 = 3}.$$

****

2º) Un fabricante va a tener un producto a la venta durante 10 años. Durante este tiempo, el precio del producto P, en euros, está relacionado con el tiempo que hace que está a la venta t, según la función $P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & si\ \ 2 < x \leq 10 \end{cases}$.

a) Indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto durante esos 10 años.

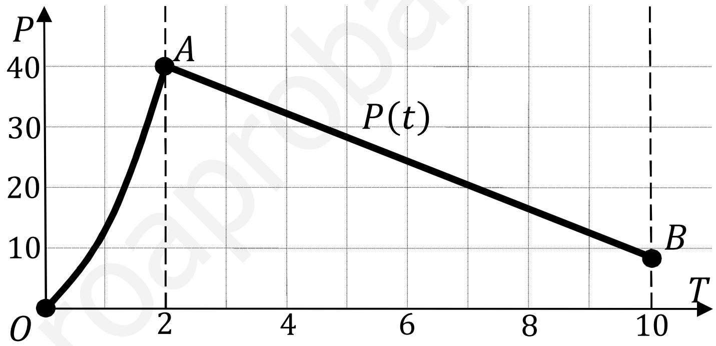
b) Encuentra el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los 5 últimos años que estuvo a la venta.

----

a)

$$5(t+1)^2 - 5 = 5 \cdot (t^2 + 2t + 1) - 5 = 5t^2 + 10t + 5 - 5 = 5t^2 + 10t.$$

Para la representación gráfica de la función tenemos en cuenta que en el intervalo $[0, 2]$ la función es la parábola de ecuación $P(t) = 5t^2 + 10t$, que es una parábola cóncava $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de t^2, y cuyo vértice (mínimo) es el punto siguiente:



$$P'(t) = 10t + 10 = 0;\ t + 1 = 0;\ \ t = -1.$$

$$P(-1) = 5 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) = 5 - 10 = -5 \Rightarrow V(-1, -5).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0, 0)\ y\ A(2, 40)$.

En el intervalo $(2, 10]$ la función es la recta $P(t) = -4t + 48$, cuyos puntos extremos son $A(2, 40)\ y\ B(10, 8)$.

De la observación de la figura de deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de los precios del producto durando los 10 años, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: t \in (0, 2)}. \qquad \underline{Decrecimiento: t \in (2, 10)}.$$

b)

$$\underline{El\ precio\ máximo\ se\ alcanzó\ a\ los\ dos\ años\ y\ fue\ de\ 40\ euros.}$$

$$TVM_{(5,10)} = \frac{P(10) - P(5)}{10 - 5} = \frac{(-4 \cdot 10 + 48) - (-4 \cdot 5 + 48)}{5} = \frac{-40 + 48 + 20 - 48}{5} = \frac{-20}{5} = \underline{-4}.$$

****

3º) Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en ampollas pequeñas que cuestan 70 euros, y colonia, que es más diluida y que se vende en ampollas más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar una ampolla de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar una colonia se necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

a) Determine la función de objetivos y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) ¿Cuántas unidades tiene que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, los ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos?

----

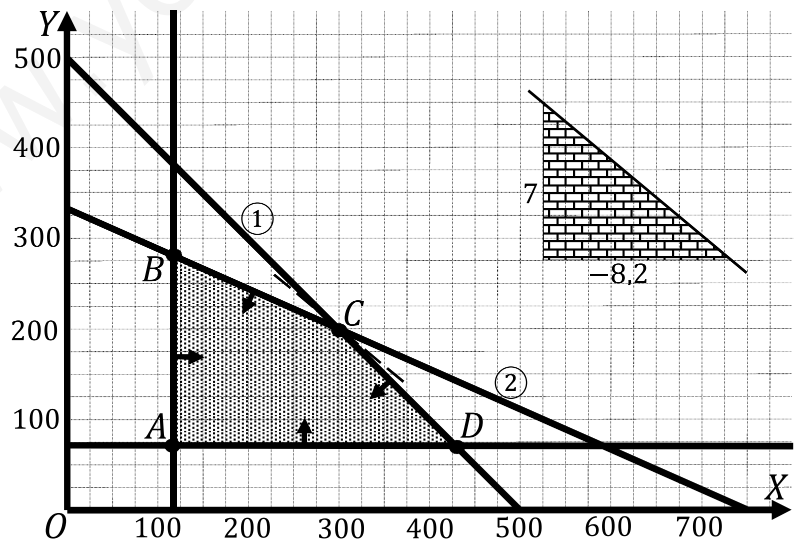
a)

Sean x e y el número de ampollas de perfume y colonia que vende la fábrica, respectivamente.

La función de objetivos es $\underline{f(x,y) = 70x + 82y}$.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 10x + 10y \le 5.000 \\ 40x + 90y \le 30.000 \\ x \ge 120;\;\; y \ge 70 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x + y \le 500 \\ 4x + 9y \le 3.000 \\ x \ge 120;\;\; y \ge 70 \end{array}\right\}}$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 120 \\ y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow A(120, 70).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 120 \\ 4x + 9y = 3.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 480 + 9y = 3.000;\;\; 9y = 3.000 - 480 = 2.520;$$

$y = \frac{2.520}{9} = 280 \Rightarrow B(120, 280).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 500 \\ 4x + 9y = 3.000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - 4y = -2.000 \\ 4x + 9y = 3.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y = 1.000;\;\; y = 200;$$

$200 + x = 500;\;\; x = 300 \Rightarrow C(300, 200).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 70 \\ x + y = 500 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 70 = 500;\;\; x = 430 \Rightarrow D(430, 70).$$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(120, 70) = 70 \cdot 120 + 82 \cdot 70 = 8.400 + 5.740 = 14.140.$

$B \Rightarrow f(120, 280) = 70 \cdot 120 + 82 \cdot 280 = 8.400 + 22.960 = 31.360.$

$C \Rightarrow f(300, 200) = 70 \cdot 300 + 82 \cdot 200 = 21.000 + 16.400 = 37.400.$

$D \Rightarrow f(430, 70) = 70 \cdot 430 + 82 \cdot 70 = 30.100 + 5.740 = 35.840.$

El valor máximo se produce en el punto $C(300, 200)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 70x + 82y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{82}x = -\frac{35}{41}x \Rightarrow m = -\frac{7}{8,2}.$

$\underline{Beneficio\ máximo: fabricando\ 300\ perfumes\ y\ 200\ colonias.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 37.400\ euros.}$

****

4º) Considere las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$.

a) Calcule los valores de a, b y c para que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(3, -5)$.

b) Para $c = 4$, halle la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

----

a)

$f(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^2 - a + b = 3;\ \ 1 - a + b = 3;\ -a + b = 2.$ (1)

$f(3) = -5 \Rightarrow 3^2 + 3a + b = -5;\ \ 9 + 3a + b = -5;\ 3a + b = -14.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 2 \\ 3a + b = -14 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a - b = -2 \\ 3a + b = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = -16 \Rightarrow \underline{a = -4}.$$

$-(-4) + b = 2;\ \ 4 + b = 2 \Rightarrow \underline{b = -2}.$

$g(-1) = 3 \Rightarrow -(-1)^2 + c = 3;\ -1 + c = 3 \Rightarrow \underline{c = 4}.$

b)

El punto de tangencia es $g(-1) = -(-1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3 \Rightarrow M(-1, 3)$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$g'(x) = -2x.$ $\quad m = g'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2.$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $M(-1, 3)$ con $m = 2$ es:

$y - 3 = 2 \cdot (x + 1);\ \ y - 3 = 2x + 2$

$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv 2x - y + 5 = 0}.$

****

5º) Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar practicando tres modalidades deportivas: natación, ciclismo y campo a través. La distancia total que se recorre en el triatlón es de 75 km. Sabemos que el recorrido en bicicleta es igual a 4 veces la distancia que se recorre nadando y campo a través juntas. Sabemos también que si se suman 3 km a la distancia que se hace campo a través es igual que 5 veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.

Sean x, y, z las distancias en kilómetros de que consta el triatlón en natación, ciclismo y campo a través, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=75 \\ y=4\cdot(x+z) \\ z+3=5x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=75 \\ 4x-y+4z=0 \\ 5x-z=3 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 75 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{75+12+3}{1+20+5+4}=\frac{90}{30}=3.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 75 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{30}=\frac{12+1.500-12+300}{30}=\frac{1.800}{30}=60.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 75 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{30}=\frac{-3+375-12}{30}=\frac{360}{30}=12.$$

$$\underline{Consta\ de\ 3\ km\ nadando,\ \ 60\ km\ en\ bicicleta\ y\ 12\ km\ de\ campo\ a\ través.}$$

****

6º) La función $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$, donde $x \in [-1, 32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x, expresada en grados centígrados, que varía entre $-1°\ C\ y\ 32°\ C$.

a) Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la cual se obtiene la máxima producción. ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá con esta temperatura?

b) Calcule las temperaturas con que se logra el nivel mínimo de producción y cuál es este valor mínimo.

----

a)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$Q'(x) = [2 \cdot (x+1) \cdot 1] \cdot (32-x) + (x+1)^2(-1) =$$

$$= (x+1) \cdot [2 \cdot (32-x) - (x+1)] = (x+1) \cdot (64 - 2x - x - 1) =$$

$$= (x+1) \cdot (63 - 3x) \Rightarrow Q'(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (21 - x).$$

$$Q''(x) = 3 \cdot [1 \cdot (21-x) + (x+1) \cdot (-1)] = 3 \cdot (21 - x - x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q''(x) = 3 \cdot (20 - 2x) = 6 \cdot (10 - x).$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1) \cdot (21-x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 21.$$

$$Q''(-1) = 6 \cdot (10+1) = 66 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$Q''(21) = 6 \cdot (10 - 21) = -66 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 21.$$

$$\underline{La\ máxima\ producción\ se\ produce\ con\ 21°\ centígrados.}$$

$$Q(21) = (21+1)^2(32-21) = 22^2 \cdot 11 = 484 \cdot 11 = 5.324.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ del\ invernadero\ es\ de\ 5.324\ euros.}$$

b)

$$\underline{La\ mínima\ producción\ se\ produce\ con - 1°\ centígrados.}$$

$$Q(-1) = (1-1)^2(32+1) = 0^2 \cdot 33 = 0.$$

$$\underline{El\ beneficio\ mínimo\ del\ invernadero\ es\ de\ 0\ euros.}$$

****