PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Un vendedor de una librería de libros viejos cobra, además de un sueldo fijo, diferentes comisiones dependiendo de los libros que vende. Cobra un euro por cada comic, 1,5 euros por cada revista y 2 euros por cada novela. Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 comics menos que revistas, y ha conseguido en total una comisión de 30 euros. ¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?

Sean x, y, z los comics, revistas y novelas que vende el librero, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+1{,}5y+2z=30 \\ y=2z \\ x+5=y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+3y+4z=60 \\ y-2z=0 \\ x-y=-5 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 60 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{30\mp20-120}{-6-4-4}=\frac{50-120}{-14}=\frac{-70}{-14}=5.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 60 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-120-20}{-14}=\frac{-140}{-14}=10. \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 60 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-10-60}{-14}=\frac{-70}{-14}=5.$$

$$\underline{Vendio\ 5\ comics, 10\ revistas\ y\ 5\ novelas.}$$

****

2º) El 1 de enero de 2.019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. La función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ nos da el número total de unidades vendidas, donde x es el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0, 12]$).

a) ¿Cuántas unidades se han vendido al cabo de 3 meses? ¿Cuántas unidades se vendieron al cabo del año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12.

b) Compruebe que la función es creciente en el intervalo $[0, 12]$ y calcule en que instante el crecimiento ha sido más lento.

----

a)

$$f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1.470 \cdot 3 = 270 - 1.890 + 4.410 = 2.790.$$

$$\underline{Al\ cabo\ de\ tres\ meses\ se\ han\ vendido\ 2.790\ unidades\ del\ producto.}$$

$$f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1.470 \cdot 12 = 17.280 - 30.240 + 17.640 =$$

$$= 34.920 - 30.240 = 4.680.$$

$$\underline{Al\ cabo\ del\ año\ se\ han\ vendido\ 4.680\ unidades\ del\ producto.}$$

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow TVM[3, 12] = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = \frac{1.890}{9} = 210.$$

$$\underline{TVM[3, 12] = 210}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1.470.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30x^2 - 420x + 1.470 = 0;\ \ x^2 - 14x + 49 = 0;\ \ (x - 7)^2 = 0.$$

De lo anterior se deduce que:

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1.470 = (30x - 210)^2 \geq 0, \forall x \in D(f).$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ f(x)\ es\ creciente\ en\ su\ dominio.}$$

Para determinar el crecimiento más lento (mínimo) se trata de hallar el mínimo de la función $f'(x) = 30x^2 - 420x + 1.470$, que es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2.

$$f''(x) = 60x - 420 = 0 \Rightarrow 60x - 420 = 0; \;\; x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7.$$

$$\underline{El\ menor\ crecimiento\ se\ produce\ el\ mes\ de\ julio}.$$

****

3º) El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8 euros. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión que si el precio del menú es de 18 euros entran a comer al restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de manera que, por cada euro que aumenta el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que disminuye el precio, aumenta en 4 el número de clientes.

a) Obtener la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros que aumenta o disminuye el precio inicial del menú.

b) Calcula en cuantos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el máximo beneficio. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio?

----

a)

Sea x el número de euros que aumenta o disminuye el menú e y el número de clientes.

Como la función que relaciona el precio del menú y el número de clientes sabemos que es una recta, ha de ser de la forma: $y = mx + n$.

Como se tienen dos incógnitas tenemos que plantear dos ecuaciones, para lo cual, tenemos en cuenta que si $x = 0 \rightarrow y = 120$: $120 = 0 \cdot m + n \Rightarrow n = 120$

Por ejemplo, subiendo el precio 2 euros, disminuye en 8 el número de clientes:

$x = 2 \rightarrow y = 112$: $112 = 2m + n = 2m + 120$; $2m = -8 \Rightarrow m = -4$.

La función que relaciona el precio del menú y el número de clientes es la siguiente: $y = -4x + 120$.

El coste de cada menú es de 8 euros y se vende a $(x + 18)$ euros, se obtiene una ganancia en cada menú de: $(x + 18) - x = (x + 10)$ euros.

El número de clientes cuando el precio sube x euros es $(120 - 4x)$, por lo cual, la función beneficios es:

$$B(x) = (120 - 4x)(x + 10) = 120x + 1.200 - 4x^2 - 40x.$$

$$\underline{La\ función\ beneficios\ es: B(x) = -4x^2 + 80x + 1.200}.$$

b)

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada:

$$B'(x) = -8x + 80 = 0;\ -x + 10 = 0 \Rightarrow x = 10.$$

$B''(x) = -8 < 0 \Rightarrow$ Máximo para $x = 10$.

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ cuando\ el\ precio\ del\ menú\ es\ de\ 28\ euros}$.

El beneficio máximo es el siguiente:

$B(x) = -4 \cdot 10^2 + 80 \cdot 10 + 1.200 = -400 + 800 + 1.200 = 1.600.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 1.600\ euros}.$

****

4º) Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 euros y cada mesa 25 euros. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que ha de fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas ha de ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

a) Determine la función de objetivos y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio?

Sean x e y el número de sillas y mesas elabora y vende el fabricante, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 120 \\ x\leq 10;\;\; y\geq 10 \\ x\geq 3y \\ x\geq 0;\; y\geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x+y\leq 120 \Rightarrow y\leq 120-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

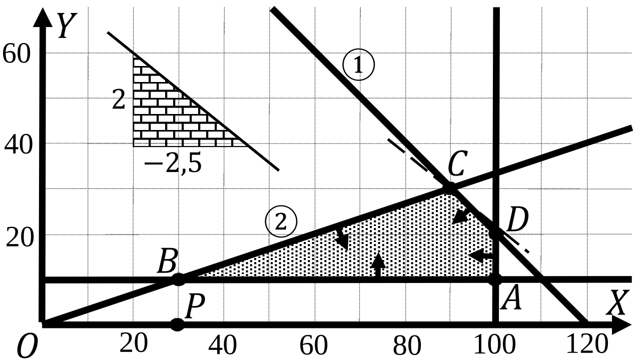
x	120	0
y	0	120

$② \Rightarrow x\geq 3y \Rightarrow y\leq \frac{x}{3} \Rightarrow P(30,0)\rightarrow Si.$

x	0	120
y	0	40

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=100 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(100,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=10 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow B(30,10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+y=120;\;\; 4y=120;\;\; y=30 \Rightarrow C(90,30).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=100 \\ x+y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 100+y=120;\;\; y=20 \Rightarrow D(100,20).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=20x+25y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(100, 10) = 20 \cdot 100 + 25 \cdot 10 = 2.000 + 250 = 2.250.$

$B \Rightarrow f(30, 10) = 20 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 600 + 250 = 850.$

$C \Rightarrow f(90, 30) = 20 \cdot 90 + 25 \cdot 30 = 1.800 + 750 = 2.550.$

$D \Rightarrow f(100, 20) = 20 \cdot 100 + 25 \cdot 20 = 2.000 + 500 = 2.500.$

El máximo se produce en el punto $C(90, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(90, 30)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 20x + 25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{25}x = -\frac{4}{5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2{,}5}.$

$\underline{El\ fabricante\ debe\ hacer\ 90\ sillas\ y\ 30\ mesas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.550\ euros.}$

****

5º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que se cumple que $A^{-1} = A^2$.

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

----

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^{-1} = A^2.}$$

b)

$$A \cdot X + B = I; \ \ A \cdot X = I - B; \ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (I - B);$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (I - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (I - B)}.$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) El beneficio de una empresa, expresada en millones de euros, viene dada por la función $B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}$, donde x indica el número de años que han pasado desde el momento en que comienza a funcionar.

a) ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa comienza a funcionar? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas?

b) ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

----

a)

$$B(0)=\frac{20}{9}-\frac{20}{9}=0.$$

$$\underline{El\ beneficio\ al\ principio, como\ es\ lógico, es\ 0.}$$

Para saben cuando la empresa pasa de tener ganancias a tener pérdidas se hace un estudio de sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

$$B'(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}=\frac{5\cdot(x^2+9)-(5x+20)\cdot 2x}{(x^2+9)^2}-0=\frac{5x^2+45-10x^2-40x}{(x^2+9)^2}=\frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}.$$

$$B'(x)=0\Rightarrow\frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}=0;\ \ -5x^2-40x+45=0;\ \ x^2+8x-9=0;$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-8\pm 10}{2}=-4\pm 5\Rightarrow x_1=-9, x_2=1.$$

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo que $x=1$.

$$B''(x)=\frac{(-10x-40)\cdot(x^2+9)^2-(-5x^2-40x+45)\cdot[2\cdot(x^2+9)\cdot 2x]}{(x^2+9)^4}=$$

$$=\frac{(-10x-40)\cdot(x^2+9)-4x\cdot(-5x^2-40x+45)}{(x^2+9)^3}=\frac{-10x^3-90x-40x^2-360+20x^3+160x^2-180x}{(x^2+9)^3}=$$

$$=\frac{10x^3+120x^2-270x-360}{(x^2+9)^3}=10\cdot\frac{x^3+12x^2-27x-36}{(x^2+9)^3}.$$

$$B''(1)=10\cdot\frac{1^3+12\cdot 1^2-27\cdot 1-36}{(1^2+9)^3}=10\cdot\frac{1+12-27-36}{1.000}=\frac{13-63}{100}<0\Rightarrow Máx.$$

Por ser $B(x)$ continua en su dominio, crece en $(0,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$, por lo cual, la empresa pasa de tener ganancias a tener pérdidas en algún valor del intervalo $(1,+\infty)$. Para determinar este valor se iguala a cero la función:

$$B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}=0\Rightarrow\frac{5x+20}{x^2+9}=\frac{20}{9};\ \ 45x+180=20x^2+180;$$

$$20x^2-45x=0;\ \ 4x^2-9x=0;\ \ x(4x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \notin (1,+\infty) \\ x_2=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4} \end{cases}.$$

El valor en años es $x=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=2\ años\ y\ 3\ meses$.

$\underline{La\ empresa\ empieza\ a\ tener\ pérdidas\ a\ los\ 2\ años\ y\ 3\ meses\ de\ comenzar.}$

$b)$

Para que el beneficio sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa su segunda derivada. Esto se produce, como se ha visto en el apartado anterior, para $x=1$.

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ al\ año\ de\ comenzar\ la\ empresa.}$

$$B(1)=\frac{5\cdot 1+20}{1^2+9}-\frac{20}{9}=\frac{25}{10}-\frac{20}{9}=\frac{5}{2}-\frac{20}{9}=\frac{45-40}{18}=\frac{5}{18}=0{,}277777778.$$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ fue\ de\ 277.777{,}78\ euros\ el\ primer\ año.}$

****