PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a sólo tres de las cuatro cuestiones y resolver sólo uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1ª) a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3$, y calcula los valores de f(x) en esos puntos. A partir de esos datos haz un dibujo aproximado de la gráfica.

b) Demuestra que la ecuación $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3=0$ tiene, exactamente, tres soluciones reales.

----

a)

$$f'(x)=3x^2-3x-6 \;;;\; f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 3x^2-3x-6=0 \;;;\; x^2-x-2=0$$

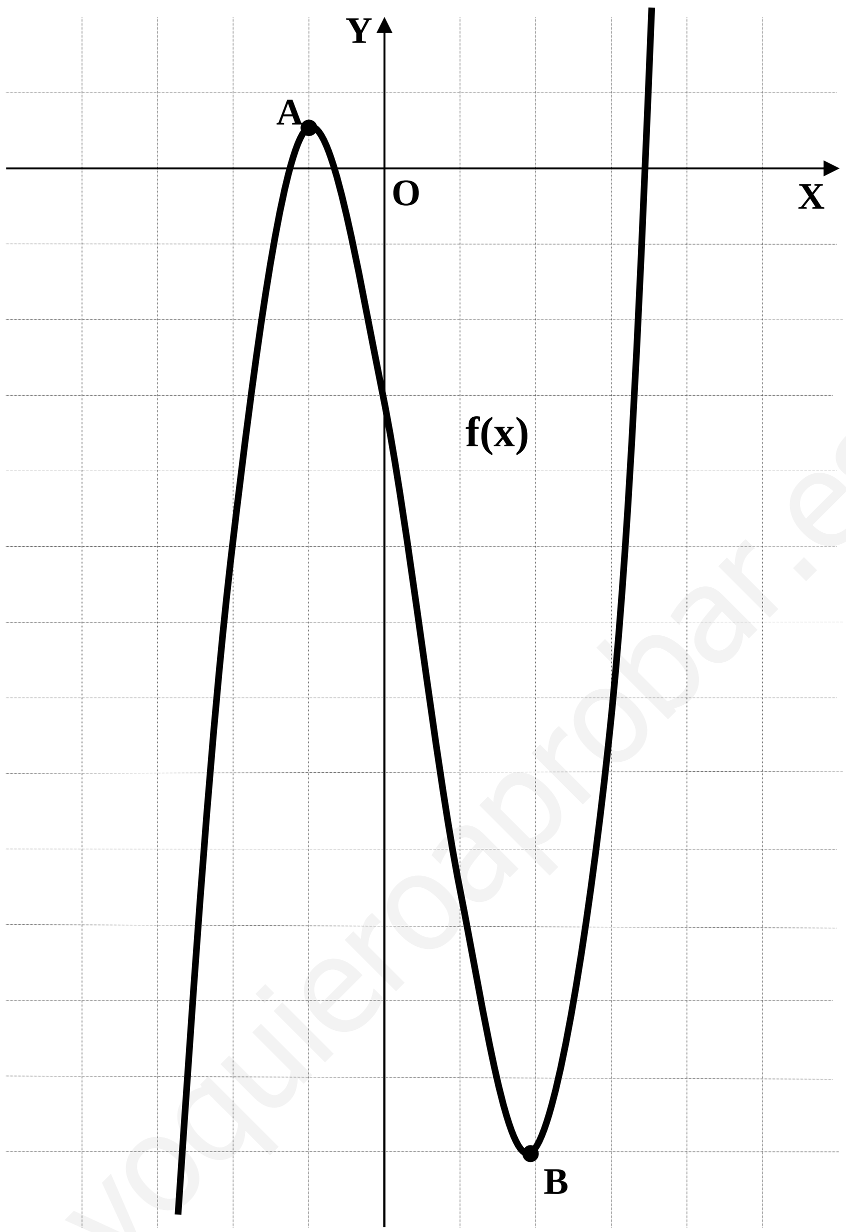
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_1=2} \;;;\; \underline{x_2=-1}$$

$$f''(x)=6x-3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(-1)=-6-3=-9<0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-1} \\ f''(2)=12-3=9>0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=2} \end{cases}$$

$$f(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)-3=-1-\frac{3}{2}+6-3=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx.\ A\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2-6\cdot 2-3=8-6-12-3=8-21=-13 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mín.\ B(2,\ -13)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



b)

Para demostrar que la ecuación $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$ tiene exactamente tres ecuaciones (que son evidentes en la gráfica de la función) tenemos en cuenta lo siguiente:

En primer lugar que la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$, por ser polinómica es continua y derivable en su dominio, que es R.

En segundo lugar, que toda función polinómica de grado impar tiene, al menos, una raíz real; ello se debe a que los límites cuando x tiende a más infinito y a menos infinito son, necesariamente son, uno de ellos más infinito y el otro menos infinito. En el caso que nos ocupa es $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

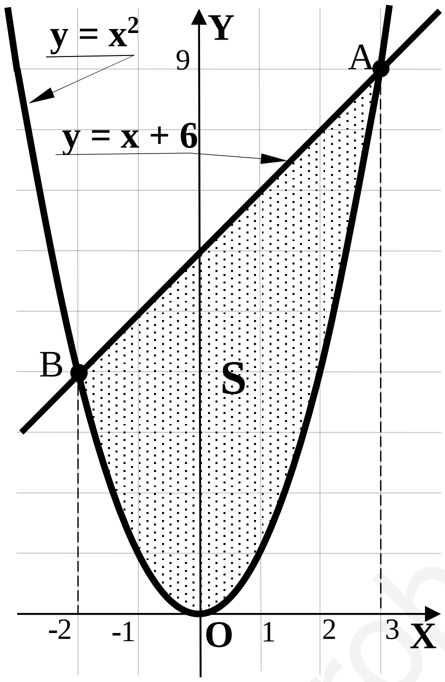
Sabiendo que el Teorema de Bolzano dice: “sii una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$” y teniendo en cuenta el párrafo anterior y que el máximo tiene ordenada positiva, en el intervalo $(-\infty,\ -1)$ la función tiene una raíz. Por un razonamiento similar con respecto a la ordenada del mínimo, que es negativa, según el mencionado teorema, la función tiene una raíz real en el intervalo $(2,\ +\infty)$.

Finalmente, y aplicando el reiterado Teorema de Bolzano, la función tiene una tercera raíz en el intervalo determinado por las abscisas del máximo y mínimo relativos, o sea, en el intervalo $(-1,\ 2)$.

No pueden existir más soluciones por ser la ecuación de tercer grado, con lo cual demostramos que la ecuación tiene, exactamente, tres raíces reales.

****

2ª) Calcular por integración la superficie del recinto delimitado por la curva $y = x^2$ y la recta de ecuación $y - x - 6 = 0$ representada en el dibujo siguiente:



Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x + 6 \;;;\; x^2 - x - 6 = 0 \;;;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: A(3, 9) y B(-1, 4).

Todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la parábola en el intervalo determinado por los límites de integración que es el siguiente: (-2, 3). El área pedida es:

$$S = \int_{-2}^{3} (x + 6) \cdot dx - \int_{-2}^{3} x^2 \cdot dx = \int_{-2}^{3} \left(x + 6 - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3} = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 - 16}{6} =$$

$$= \frac{131 - 16}{6} = \underline{\underline{\frac{115}{6}\, u^2 = S}}$$

****

3^a) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ -1,\ 4),\ \overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ 3)\ y\ \overrightarrow{w}=(1,\ 0,\ 0)$:

a) Determina si son vectores linealmente dependientes o independientes.

b) Calcula la relación que ha de haber entre los valores de a y b para que el vector $\overrightarrow{z}=(a,\ 1,\ b)$ sea combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$.

----

a)

Si los vectores son linealmente dependientes tienen que existir los valores reales $\alpha,\ \beta\ y\ \gamma$, no todos iguales a cero, tales que: $\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}+\gamma\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$. En el caso de que todos los valores $\alpha,\ \beta\ y\ \gamma$ sean cero, los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente independientes.

$$\alpha\cdot(1,-1,\ 4)+\beta\cdot(2,\ 1,\ 3)+\gamma\cdot(1,\ 0,\ 0)=(0,\ 0,\ 0)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ -\alpha+\beta=0\\ 4\alpha+3\beta=0\end{cases}.$$

$$\beta=\alpha\ ;;\ \begin{cases}\alpha+2\alpha+\gamma=0\\ 4\alpha+3\alpha=0\end{cases}\ ;;\ \begin{cases}3\alpha+\gamma=0\\ 7\alpha=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{\alpha=\beta=\gamma=0}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes.}}$$

Otra forma de determinar la dependencia o independencia de tres vectores.

Los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes cuando son coplanarios, es decir, que su rango tiene que ser dos y son linealmente independientes cuando no son coplanarios y el rango del determinante que determinan es tres:

$$Rango\ \ de\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&1&3\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix}=-3-4\neq0\ \Rightarrow\ \underline{Rango=3}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes.}}$$

b)

$$\overrightarrow{z}=m\cdot\overrightarrow{u}+n\cdot\overrightarrow{v}\ \ \Rightarrow\ \ (a\ ,\ 1,\ b)=m\cdot(1,\ -1,\ 4)+n\cdot(2,\ 1,\ 3)\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=m+2n\\ 1=-m+n\\ b=4m+3n\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m = n-1\ ;;\ \begin{cases} a = n-1+2n \\ b = 4(n-1)+3n \end{cases}\ ;;\ \begin{cases} a = 3n-1 \rightarrow n = \dfrac{a+1}{3} \\ b = 7n-4 \rightarrow n = \dfrac{b+4}{7} \end{cases} \Rightarrow\ \frac{a+1}{3} = \frac{b+4}{7}\ ;;$$

$$7a+7 = 3b+12 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{7a-3b=5}}$$

****

4ª) De un ángulo α del primer cuadrante se conoce que sea $\alpha = \frac{1}{3}$. Calcula el valor *exacto* de: $a\ )\ \ tag\ \alpha$. $\qquad b\ )\ \ sen\ (2\alpha)$.

----

a)

$$tag\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{\sqrt{1 - sen^2\ \alpha}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{9-1}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4} = tag\ \alpha}}$$

b)

$$sen\ (2\alpha) = 2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot sen\ \alpha \cdot \sqrt{1 - sen^2\ \alpha} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{9-1}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{9} = sen\ (2\alpha)}}$$

****

PROBLEMAS

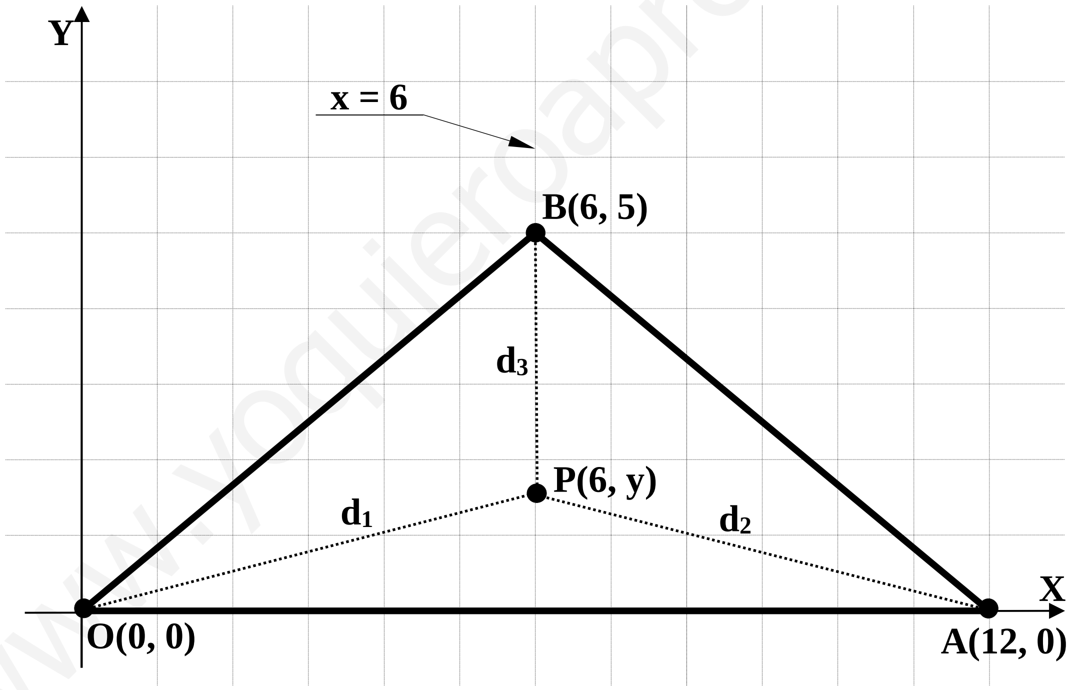
1º) El lado desigual de un triángulo isósceles mide 12 metros y la altura sobre este lado es de 5 metros.

a) Dado un punto arbitrario sobre esta altura, obtén una expresión de la suma de las distancias de este punto a cada uno de los vértices del triángulo.

b) Determina los puntos sobre la altura que cumplen que la suma de las distancias a los tres vértices del triángulo sea máxima y los puntos para los cuales sea mínima.

En primer lugar situamos el triángulo en unos ejes coordenados, situando uno de sus vértices en el origen para facilitar el proceso.

Para una mejor comprensión del ejercicio hacemos una representación gráfica de la situación.



$$d_1 = d_{(\overline{OP})} = \sqrt{6^2 + y^2} \quad ;; \quad d_2 = d_{(AP)} = \sqrt{6^2 + (-y)^2} \quad ;; \quad d_3 = d_{(\overline{CP})} = 5 - y$$

$$D(y) = d_1 + d_2 + d_3 = \sqrt{y^2 + 36} + \sqrt{y^2 + 36} + 5 - y = \underline{\underline{2\sqrt{y^2 + 36} - y + 5 = D(y)}}$$

b)

Para que la distancia sea máxima o mínima, su derivada tiene que ser cero:

$$D'(y)=2\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+36}}-1=\frac{2y}{\sqrt{y^2+36}}-1=D'(y)\ ;;\ D'(y)=0\ \Rightarrow\ \frac{2y}{\sqrt{y^2+36}}-1=0\ ;;$$

$$2y=\sqrt{y^2+36}\ ;;\ 4y^2=y^2+36\ ;;\ 3y^2=36\ ;;\ y^2=12\ ;;\ y=\pm 2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P\left(6,\ 2\sqrt{3}\right)}}$$

(El valor negativo carece de sentido por no pertenecer a la altura)

Para diferenciar si la distancia se trata de un máximo o de un mínimo recurrimos a la segunda derivada:

$$D''(y)=\frac{2\cdot\sqrt{y^2+36}-2y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+36}}}{\left(\sqrt{y^2+36}\right)^2}=\frac{2\sqrt{y^2+36}-\frac{2y^2}{\sqrt{y^2+36}}}{y^2+36}=\frac{2\left(y^2+36\right)-2y^2}{\left(y^2+36\right)\sqrt{y^2+36}}=$$

$$=\frac{2y^2+72-2y^2}{\left(y^2+36\right)\sqrt{y^2+36}}=\underline{\frac{76}{\left(y^2+36\right)\sqrt{y^2+36}}=D''(y)}$$

Por ser $D''(y)$ una función par es $D''(y)>0,\ \forall y\in R$, lo cual justifica que <u>la solución encontrada es un mínimo de la función.</u> No existe la posibilidad de que la distancia sea máxima.

<u>El punto se encuentra sobre la altura, aproximadamente, a 3’46 metros de la base.</u>

****

2º) Considera la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+az+2=0$, donde a es un parámetro.

a) ¿Para qué valor de a la recta r y el plano π son paralelos? ¿Cuál será entonces la distancia del punto P(1, 0, -1) a la recta y al plano?

b) ¿Existe algún valor de α para el cual la recta y el plano sean perpendiculares?

c) Determina el valor de α para que la recta y el plano formen un ángulo de 30º.

----

a)

Una expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x-5y=3+\lambda \\ x-3y=2+\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2x-5y=3+\lambda \\ -2x+6y=-4-2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y=-1-\lambda} \;;;\; x=2+\lambda+3y=2+\lambda-3-3\lambda=\underline{-1-2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v}=(-1,\ -1,\ 1)$.

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector normal del plano, $\overrightarrow{n}=(2,\ -1,\ a)$ y el vector director de la recta, $\overrightarrow{v}=(-2,\ -1,\ 1)$, sean perpendiculares, o sea, que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}=(2,\ -1,\ a)\cdot(-2,\ -1,\ 1)=0 \;;;\; -4+1+a=0 \;;;\; \underline{\underline{a=3}}$$

La distancia del punto P(1, 0, -1) al plano $\pi \equiv 2x-y+3z+2=0$ es la siguiente:

$$d(P,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|\ 2\cdot 1-1\cdot 0+3\cdot(-1)+2\ |}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{|2-0-3+2|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$\underline{\underline{d(P,\ \pi)=\frac{\sqrt{14}}{14}\ unidades}}$$

La distancia de un punto a una recta viene dado por $d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q un punto de la recta r.

Un punto de la recta r es Q(-1, -1, 1), con lo cual el vector $\overrightarrow{QP}$ resulta ser:

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1,\ 0,\ -1) - (-1,\ -1,\ 1) = (2,\ 1,\ -2).$$

Aplicando la fórmula anterior:

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|i + 4j - 2k + 2k - 2i - 2j|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-i + 2j|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{30}}{6}\ unidades = d(P,\ r)}}$$

b)

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector normal del plano, $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ a)$ y el vector director de la recta, $\overrightarrow{v} = (-2,\ -1,\ 1)$, sean paralelos, o sea, que sus respectivas componentes sean proporcionales:

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ no\ \ pueden\ \ ser\ \ perpendiculares}}$$

(Independientemente del valor de α)

c)

La recta r y el plano π forman un ángulo de 30º cuando el vector normal del plano, $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ a)$, y el vector director de la recta, $\overrightarrow{v} = (-2,\ -1,\ 1)$, formen un ángulo de 60º.

Aplicando el producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos 60^o \Rightarrow (2, -1, \alpha) \cdot (-2, -1, 1) = \sqrt{4+1+\alpha^2} \cdot \sqrt{4+1+1} \cdot \frac{1}{2}\ ;;$$

$$-4+1+\alpha = \sqrt{5+\alpha^2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\ ;;\ 2\alpha - 6 = \sqrt{6(5+\alpha^2)}\ ;;\ 4\alpha^2 - 24\alpha + 36 = 30 + 6\alpha^2\ ;;$$

$$2\alpha^2 + 24\alpha - 6 = 0\ ;;\ \alpha^2 + 12\alpha - 3 = 0.$$

$$\alpha = \frac{-12 \pm \sqrt{144+12}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{2} = -6 \pm \sqrt{39} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\alpha_1 = -6 + \sqrt{39}}} \\ \underline{\underline{\alpha_2 = -6 - \sqrt{39}}} \end{cases}$$

****