PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1ª) Dada la función $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$, calcular los valores de a para que las tangentes en los puntos de abscisas x = 1 y x = -1 sean perpendiculares.

La tangente a una función en un punto es la derivada de la función en ese punto.

Dos pendientes o tangentes son perpendiculares cuando sus valores son inversos y de signos contrarios.

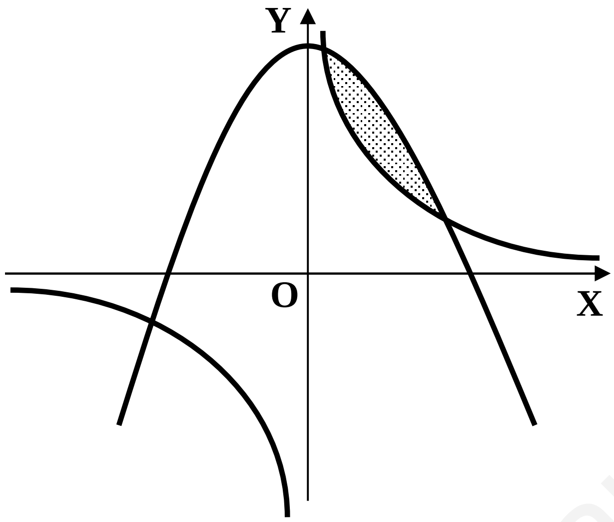
$$f'(x) = 3ax^2 + 4x \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = \underline{3a + 4 = m_1} \\ \\ f'(-1) = \underline{3a - 4 = m_2} \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \Rightarrow$$

$$3a + 4 = -\frac{1}{3a-4} \;;\; (3a+4)(3a-4) = -1 \;;\; 9a^2 - 16 = -1 \;;\; 9a^2 = 15 \;;\; a^2 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \;;$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\underline{m_1 = \frac{\sqrt{15}}{3}}} \\ \\ \underline{\underline{m_2 = -\frac{\sqrt{15}}{3}}} \end{cases}$$

****

2ª) Calcular el área que tiene el único recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $y = -x^2 + 7$ e $y = \frac{6}{x}$ representadas en el siguiente dibujo.



Los puntos de corte de la parábola y la hipérbola en el primer cuadrantes son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 7 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 7 = \frac{6}{x} \;;;\; -x^3 + 7x = 6 \;;;\; x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (Ruffini) \Rightarrow$$

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	$\boxed{0}$
2		2	6	
	2	3	$\boxed{0}$	
-3		$\boxed{-3}$		

De las raíces obtenidas tomamos solamente las dos positivas, por estar la superficie que queremos hallar en el primer cuadrante.

Los límites de integración son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Como las ordenadas de la parábola son mayores que las de la hipérbola en el intervalo (1, 2), la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^2 \left[\left(-x^2 + 7 \right) - \frac{6}{x} \right] \cdot dx = \int_1^2 \left(-x^2 + 7 - \frac{6}{x} \right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x - 6Lx \right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 14 - 6L2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 7 - 6 \cdot 0 \right) = 7 - \frac{7}{3} - 6L2 = \underline{\underline{\frac{14}{3} - 6L2 \; u^2 = S}}$$

****

3ª) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\end{array}\right\}$, se pide:

a) Añadir una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resolver el sistema obtenido.

----

a)

Se trata de que resulte un sistema cuya matriz de coeficientes tenga rango dos y la matriz ampliada tenga rango tres; esto se consigue añadiendo una ecuación cuyos coeficientes sean linealmente dependientes a los coeficientes de las dos ecuaciones dadas y el término independiente que no lo sea.

Por ejemplo, la suma de los coeficientes y como término independiente, cualquiera que no sea la suma:

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\\5x-5y+2z=3\end{array}\right\}}}$$

Las dos ecuaciones dadas, por ser linealmente independientes, representan una recta y lo que se ha hecho es añadir un plano paralelo a la recta, sin contenerla.

b)

Se trata de que resulte un sistema cuyas matrices de coeficientes y ampliada tengan ambas rango dos, menor que el número de incógnitas, que es tres; esto se consigue añadiendo una ecuación que sea linealmente dependiente con las dos ecuaciones dadas.

Por ejemplo, la diferencia de las ecuaciones:

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\\x+y=1\end{array}\right\}}}$$

Las dos ecuaciones dadas, por ser linealmente independientes, representan una recta y lo que se ha hecho es añadir un plano que contiene a la recta.

Para la resolución, tomamos dos cualquiera de las ecuaciones y parametrizamos una de las incógnitas:

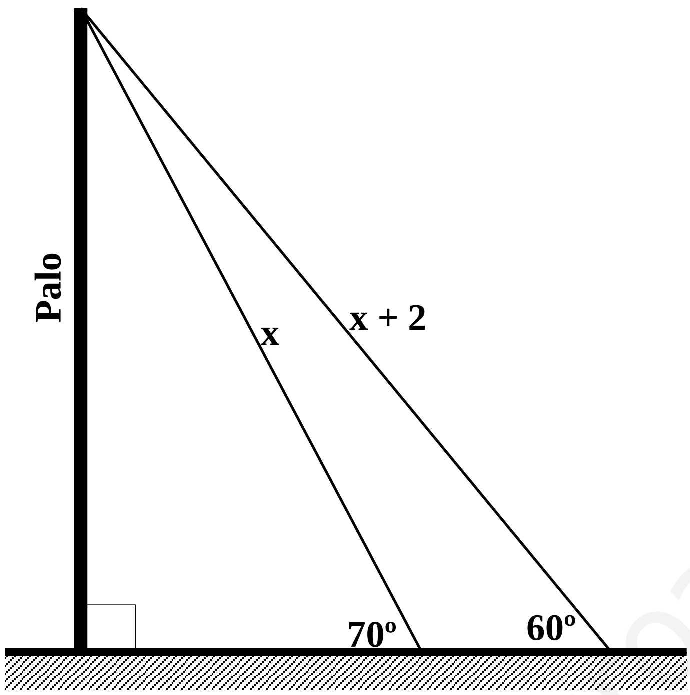
$$\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\x+y=1\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{z=\lambda}\quad \left.\begin{array}{l}3x-2y=5-\lambda\\2x+2y=2\end{array}\right\}\Rightarrow 5x=7-\lambda\ ;;\ \underline{x=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\lambda}$$

$$x+y=1\ ;;\ y=1-x=1-\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\lambda\right)=1-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\lambda=\underline{-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\lambda=y}$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\lambda \\ y=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

4ª) El circo ha llegado a la ciudad y se ha de instalar. El especialista en montaje no ha llegado y los demás no saben la cantidad de cable de acero que necesitan. El más despabilado recuerda, que una vez tensado el cable, desde el extremo del palo principal hasta un punto determinado del suelo, con el cual forma un ángulo de 60º, necesitan dos metros más de cable que si forma con el suelo un ángulo de 70º. En total han de usar seis cables tensados formando con el suelo un ángulo de 60º. ¿Cuántos metros de cable necesitan?



$$\left.\begin{array}{l} sen\ 70^\circ = \dfrac{h}{x} \\ sen\ 60^\circ = \dfrac{h}{x+2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow h = x \cdot sen\ 70^\circ \\ \rightarrow h = (x+2) \cdot sen\ 60^\circ \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\ 70^\circ = (x+2) \cdot sen\ 60^\circ \ ;;$$

$$x \cdot sen\ 70^\circ = x \cdot sen\ 60^\circ + 2 \cdot sen\ 60^\circ \ ;;$$

$$x \cdot sen\ 70^\circ - x \cdot sen\ 60^\circ = 2 \cdot sen\ 60^\circ \ ;;$$

$$x (sen\ 70^\circ - sen\ 60^\circ) = 2 \cdot sen\ 60^\circ \ ;;$$

$$x = \frac{2 \cdot sen\ 60^\circ}{sen\ 70^\circ - sen\ 60^\circ} = \frac{2 \cdot 0'8660}{0'9397 - 0'8660} = \frac{1'7321}{0'0737} = \underline{23'51\ \ metros = x}$$

Como el cable tiene que formar un ángulo de 60º con el suelo su longitud será de dos metros mayor, o sea: $l_1 = 23'51 + 2 = \underline{25'51\ metros = l_1}$.

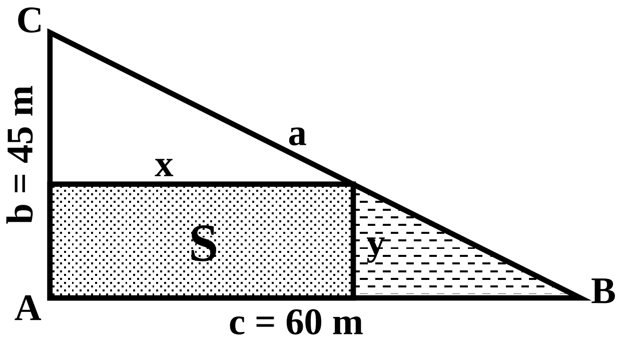
Como son en total 6 cables, la longitud total es: $L = 6 \cdot 25'51 = \underline{153'07\ \ metros = L}$

<u>Se necesitan 153007 metros de cable de acero.</u>

****

PROBLEMAS

1º) Un terreno tiene forma de triángulo rectángulo: las medidas de sus catetos son las siguientes: c = 60 metros; b = 45 metros. En este terreno se puede construir una casa de planta rectangular como indica la parte sombreada de la figura.



Se quiere vender este terreno y nos pagan 5000 pesetas por cada metro cuadrado no edificable y 25000 pesetas por cada metro cuadrado edificable.

a) Determinar la relación que hay entre la anchura x y la profundidad y del rectángulo que determina la parte edificable.

b) Determinar la expresión que da el valor del terreno en función de la anchura x del rectángulo.

c) ¿Cuáles son las dimensiones de la parte edificable que nos permite obtener un valor máximo para este terreno?

d) ¿Cuál es el valor máximo?

----

a)

El triángulo rayado es semejante al triángulo primitivo, por lo cual, aplicando el Teorema de Thales:

$$\frac{y}{45}=\frac{60-x}{60}\ ;;\ y=\frac{45}{60}(60-x)=\underline{\underline{\frac{3}{4}(60-x)=y}}$$

b)

$$S=x\cdot y=x\cdot\frac{3}{4}(60-x)=\underline{\underline{\frac{3}{4}\left(60x-x^2\right)=S}}$$

c)

$$S'(x)=\frac{3}{4}(60-2x)=\frac{3}{2}(30-x)\ ;;\ S'(x)=0\Rightarrow 30-x=0\ ;;\ \underline{\underline{x=30\ metros}}$$

$$y=\frac{3}{4}(60-x)=\frac{3}{4}(60-30)=\frac{3}{4}\cdot 30=\frac{90}{4}=\frac{45}{2}=\underline{\underline{22'5\ metros=y}}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''(x)=\frac{3}{2}\cdot(-1)=-\frac{3}{2}<0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo,\ c.q.j.}}$$

d)

La superficie total es:

$$S_T=\frac{60\cdot 45}{2}=30\cdot 45=\underline{1350\ m^2=S_T}$$

La superficie edificable es:

$$S_E=x\cdot y=30\cdot 22'5=\underline{675\ m^2=S_{EDIFICABLE}}$$

La superficie no edificable es:

$$S_{NE}=S_T-S_E=1350-765=\underline{675\ m^2=S_{NO\ \ EDIFICABLE}}$$

El precio de venta es:

$$P=675\cdot 5000+675\cdot 25000=576\cdot(5000+25000)=576\cdot 30000=\underline{20.250.000=P}$$

<u>El valor máximo que puede obtenerse es de 20.250.000 pesetas.</u>

****

2º) Dado el plano $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x=2z-3 \\ y=z+4 \end{cases}$ y el punto P(2, 1, 1), calcular:

a) La recta s que pasa por P y es perpendicular a π.

b) La ecuación del plano α que pasa por P y es perpendicular a la recta r.

c) La recta t que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

d) La recta m que pasa por P, es paralela al plano π y tal que su vector director es perpendicular al de r.

----

a)

Un vector normal o perpendicular a π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ 3)$.

La recta s tiene por ecuaciones paramétricas: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}}}$

b)

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x=2z-3 \\ y=z+4 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=-3+2\lambda}\ ;;\ \underline{y=\lambda+4} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

El plano α tiene como vector normal a un vector director de r, por ejemplo el vector $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ 1)$ y contiene a P:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x+y+z+D=0 \\ P(2,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2+1+1+D=0\ ;;\ \underline{D=-6} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \equiv 2x+y+z-6=0}}$$

c)

La recta t, por ser perpendicular a r, está contenida en el plano α; la intersección de la recta r con el plano α es el punto Q:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x+y+z-6=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(-3+2\lambda)+(4+\lambda)+(\lambda)-6=0\ ;;\ -6+6\lambda-2=0\ ;;$$

$$6\lambda = 8 \;;;\; 3\lambda = 4 \;;;\; \underline{\lambda = \frac{4}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3} \\ y = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q\left(-\frac{1}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{4}{3}\right)}$$

La recta t es la que pasa por los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{4}{3}\right) - (2,\ 1,\ 1) = \underline{\left(-\frac{7}{3},\ \frac{13}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \overrightarrow{PQ}}$$

Un vector director de t puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ}$, por ejemplo, $\overrightarrow{w} = (-7,\ 13,\ 1)$.

$$\underline{\underline{t \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 7\lambda \\ y = 1 + 13\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right.}}$$

d)

La recta m la determinan los planos α y β, siendo β el plano paralelo a π que pasa por P:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + 3z + D = 0 \\ P(2,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + D = 0 \;;;\; \underline{D = -7} \Rightarrow \underline{\beta \equiv x + 2y + 3z - 7 = 0}$$

$$\underline{\underline{m \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{array}\right.}}$$

****