PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder sólo a tres de las cuatro cuestiones y resolver sólo uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué.

CUESTIONES

1ª) Determina para qué valor del parámetro α el plano $\pi \equiv \alpha x + 2y + z = \alpha$ es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + z = \alpha + 1 \end{cases}$.

Para que la recta r sea paralela al plano $\pi \equiv \alpha x + 2y + z = \alpha$ es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano, $\overrightarrow{n} = (\alpha,\ 2,\ 1)$ sean perpendiculares.

Para obtener el vector director de la recta la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}(\alpha + 1 - \lambda) = \underline{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\lambda = x} \ ;; \ y = \frac{1}{\alpha}(x + z - 1) =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha}(\alpha + 1 - \lambda) + \lambda - 1\right] = 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\lambda + \lambda - 1 = \underline{\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\lambda = y}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\lambda \\ y = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha - 1}{\alpha},\ 1\right)}$$

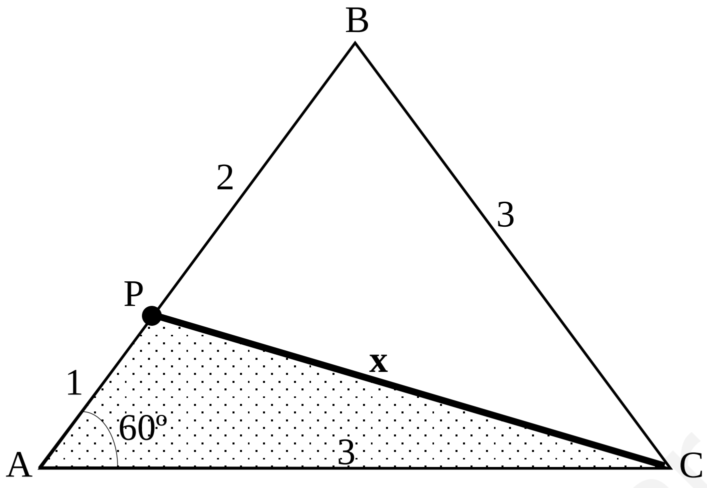
Sabiendo que dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero, sería:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha,\ 2,\ 1) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha-1}{\alpha},\ 1\right) = 0 \;;;\; -1 + \frac{2\alpha-2}{\alpha} + 1 = 0 \;;;\; \frac{2\alpha-2}{\alpha} = 0 \;;;$$

$$2\alpha - 2 = 0 \;;;\; \alpha - 1 = 0 \;;;\; \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

****

2ª) Sean A, B y C los tres vértices de un triángulo equilátero de lado 3 cm y P el punto del lado AB que está a 1 cm del vértice A. ¿Cuál es la longitud del segmento CP?



Aplicando el teorema del coseno al triángulo APC, resulta:

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60º = 1 + 9 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 3 = 7 \ ;; \ \underline{x = \sqrt{7} \cong 2'65}$$

$$\underline{\underline{\overline{CP} = 2'65 \ \ unidades}}$$

****

3ª) Considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & si \;\; x \leq 0 \\ 2x+1 & si \;\; x>0 \end{cases}$, donde $a \in R$.

a) Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$ y comprueba que $f(x)$ es continua en x = 0.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función $f(x)$ es derivable en x = 0?

----

a)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{ax} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites por la izquierda y por la derecha sean iguales e igual al valor numérico de la función en ese punto.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x+1) = \underline{1} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

<u>En efecto, la función es continua para x = 0, c.q.c.</u>

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que la función sea continua en ese punto (comprobada en el apartado anterior) y que las derivadas por la izquierda y por la derecha sean iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a \cdot e^{ax} & si \;\; x \leq 0 \\ \\ 2 & si \;\; x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = a \cdot e^0 = a \cdot 1 = \underline{a} \\ \\ f'(0^+) = \underline{2} \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

<u>La función es derivable en x = 0 para x = 2.</u>

****

4ª) Se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto A(1, -4) y que su función derivada es $f'(x) = 2x - 2$.

a) Determina la expresión de $f(x)$.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas OX.

----

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (2x - 2) \cdot dx = \frac{2x^2}{2} - 2x + K = \underline{x^2 - 2x + K = f(x)}$$

Como la función pasa por A(1, -4) tiene que ser:

$$f(1) = -4 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + K = -4 \;;;\; 1 - 2 + K = -4 \Rightarrow \underline{K = -3}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^2 - 2x - 3}}$$

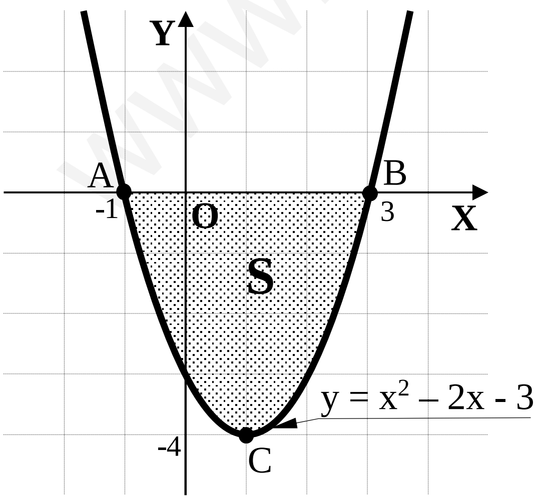
b)

Con objeto de hacer un esquema de la situación, determinamos el punto mínimo y los cortes con el eje de abscisas de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3,\ 0)} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \;;;\; 2(x - 1) = 0 \;;;\; \underline{x = 1} \Rightarrow f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow Mín.: \underline{C(1,\ -4)}$$

La representación gráfica es la indicada en la figura.



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_3^{-1} (x^2 - 2x - 3) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_3^{-1} =$$

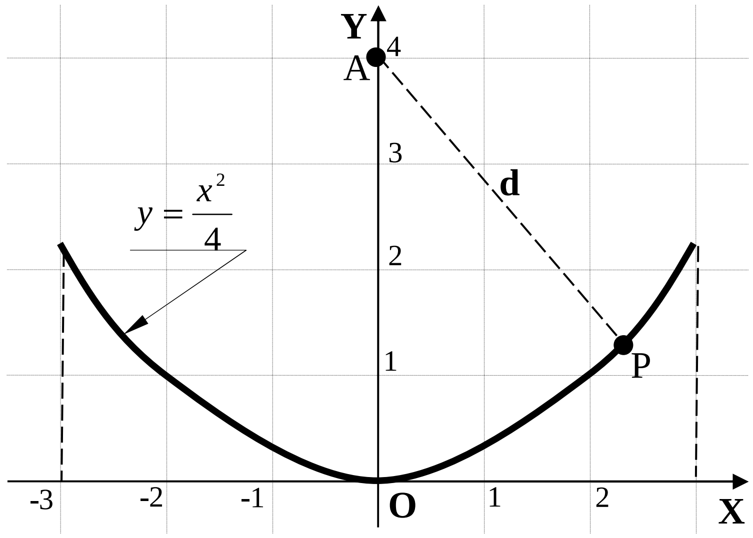
$$= \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \right] - \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = 11 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2 = S}}$$

****

PROBLEMAS

1º) La ribera de un tramo de río describe la curva $y=\frac{x^2}{4}$, para x entre -3 y 3, y en el punto A(0, 4) hay un pueblo, tal como puede verse en el esquema siguiente:



a) Expresa la distancia desde un punto cualquiera de esta orilla del río hasta el pueblo, en función de la abscisa x.

b) ¿Cuál es el punto de la orilla de este tramo del río que está más cerca del pueblo?

c) ¿Hay algún punto de la orilla del río a una distancia del pueblo inferior a 2?

----

a)

Las coordenadas del punto P, por pertenecer a la curva $y=\frac{x^2}{4}$ tiene por coordenadas $P\left(x,\ \frac{x^2}{4}\right)$. La distancia d pedida es la siguiente:

$$d=\overline{AP}=\sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2-16}{4}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{x^4-32x^2+256}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{16x^2+x^4-32x^2+256}{16}}=\underline{\underline{\frac{1}{4}\sqrt{x^4-16x^2+256}=d}}$$

b)

El punto más cercano es aquél cuya derivada de su distancia sea cero:

$$d'=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^3-32x}{2\sqrt{x^4-16x^2+256}}=\underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3-8x}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}=d'}$$

$$d'=0\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3-8x}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}=0\ ;;\ x^3-8x=0\ ;;\ x\left(x^2-8\right)=0\Rightarrow x_1=0\ ;;\ x^2-8=0\ ;;$$

$$\underline{x_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}}\ ;;\ \underline{x_3=-2\sqrt{2}}$$

Para que la distancia sea mínima, la segunda derivada tiene que ser positiva:

$$d''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}-\left(x^3-8x\right)\cdot\dfrac{4x^3-32x}{2\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{\left(\sqrt{x^4-16x^2+256}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}-\dfrac{x\left(x^2-8\right)\cdot 2x\left(x^2-8\right)}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{x^4-16x^2+256}=$$

$$d''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{\left(3x^2-8\right)\left(\sqrt{x^4-16x^2+256}\right)^2-2x^2\left(x^2-8\right)^2}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{x^4-16x^2+256}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\left(x^4-16x^2+256\right)-2x^2\left(x^4-16x^2+64\right)}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^6-48x^4+768x^2-8x^4+128x^2-2048-2x^6+32x^4-128x^2}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=$$

$$\underline{=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^6-24x^4+768x^2-2048}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=d''}$$

$$d''(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2048}{256\sqrt{256}}<0\;\Rightarrow\;\underline{\textit{Máximo para }x=0}$$

$$d''\left(2\sqrt{2}\right)=d''\left(-2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8^3-24\cdot 8^2+768\cdot 8-2048}{\left(8^2-16\cdot 8+256\right)\sqrt{8^2-16\cdot 8+256}}=\frac{8^2\left(1-24+96-32\right)}{8^2\left(1-2+4\right)\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{97-56}{3\sqrt{3}}=\frac{41}{3\sqrt{3}}>0\;\Rightarrow\;\underline{\textit{Mínimos para }x=\pm 2\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los puntos del río más cercanos al pueblo son }P_1\left(-2,\ 2\sqrt{2}\right)\textit{ y }P_2\left(2,\ 2\sqrt{2}\right).}}$$

c)

La distancia de los puntos más próximos al pueblo es la siguiente:

$$d_{MÍNIMA}=\frac{1}{4}\sqrt{8^2-16\cdot 8+256}=\frac{1}{4}\sqrt{64-128+256}=\frac{1}{4}\sqrt{192}=\frac{1}{4}\sqrt{12\cdot 2^4}=\underline{\sqrt{12}=d_{MÏNIMA}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Por ser }\sqrt{12}>2,\textit{ no existen puntos de la orilla a menos de dos del pueblo.}}}$$

****

2º) Sean el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto P(1, 1, 0).

a) Calcular la distancia d del punto P al plano π.

b) Determina la ecuación del plano π', paralelo a π, que también diste d del punto P.

c) Determina la ecuación de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

d) Calcula la intersección de la recta r con el plano π.

----

a)

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ y al plano $\pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$, es:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 1 + 0 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u = d(P,\ \pi)}}$$

b)

El haz de planos paralelos al plano π tiene por ecuación $\alpha \equiv x - y + 2z + k = 0$, siendo k un valor real.

Aplicando la fórmula, sabiendo que la distancia es $d = \frac{3}{\sqrt{6}}$:

$$d(P,\ \alpha) = \frac{|\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{|1 - 1 + 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{|k|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow |k| = 3$$

De los dos valores posible de k, 3 y -3, es evidente que el valor -3 es para el plano conocido π, por lo cual el plano pedido es:

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x - y + 2z + 3 = 0}}$$

c)

La recta r, que contiene al punto P(1, 1, 0), tiene como vector director al vector normal del plano π: $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 2)$.

La recta r expresada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}}}$$

d)

La intersección de la recta r y el plano π se puede obtener diversas formas; una de las más sencillas es la siguiente:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es $Q(1+\lambda,\ 1-\lambda,\ 2\lambda)$.

El punto intersección tiene que satisfacer la ecuación del plano π:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + 2z = 3 \\ Q(1+\lambda,\ 1-\lambda,\ 2\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow\ (1+\lambda)-(1-\lambda)+2\cdot(2\lambda)=3\ ;;\ 1+\lambda-1+\lambda+4\lambda=3\ ;;\ 6\lambda=3\ ;;$$

$$2\lambda = 1\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ Q\left(1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 2\cdot\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Q\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)}}$$

****