

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO – 2006**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

OPCIÓN A**CUESTIONES**

1ª) Encuentre las coordenadas de los puntos situados sobre la recta r de ecuación vectorial $r \equiv (x, y, z) = (-1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 1)$ que están a la distancia de una unidad del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$.

Los puntos genéricos de la recta r son de la forma $P(-1+t, 1+2t, 1+t)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al caso que nos ocupa, teniendo en cuenta que la distancia es de una unidad:

$$d(P, \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (-1+t) + 2 \cdot (1+2t) + 1 \cdot (1+t) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-2 + 2t + 2 + 4t + 1 + t - 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 1 \;;$$

$$\frac{|7t-4|}{\sqrt{9}} = 1 \;; \quad \frac{|7t-4|}{3} = 1 \;; \quad |7t-4| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 7t-4 = 3 \;; \; 7t = 7 \;; \; \underline{t_1 = 1} \\ 7t-4 = -3 \;; \; 7t = 1 \;; \; \underline{t_2 = \frac{1}{7}} \end{cases}$$

Los puntos que cumplen la condición son:

$$P(-1+t, 1+2t, 1+t) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0, 3, 2)}}$$

$$P(-1+t, 1+2t, 1+t) \Rightarrow t = \frac{1}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7} = x \\ y = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = y \\ z = 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} = z \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2ª) Averigüe si el sistema $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$ puede ser compatible indeterminado para algún valor de m .

Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas; para que sea compatible indeterminado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser menor que tres, o sea, su determinante tiene que ser cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 4m + 4 + 9 - 8 - 3 - 6m = 0 \quad ;; \quad 2 - 2m = 0 \quad ;; \quad 1 - m = 0 \quad ;; \quad \underline{m = 1}$$

Para $m = 1 \Rightarrow \text{Rang } A = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado.}$

3ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) Compruebe que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 1+1 \\ 2-4 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A \cdot B}}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1-1 \\ 4-2 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B \cdot A}}$$

b)

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0-0 \\ 12-12 & 0+4 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}} = (A+B)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-2 & -1+1 \\ 2-2 & -2+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+4 & 1-1 \\ 4-4 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}} = A^2 + B^2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(A+B)^2 = A^2 + B^2, \text{ c.q.c. (como queríamos comprobar)}}}$$

4ª) Encuentre el dominio y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

Por tratarse de una función racional, su dominio es $\mathbb{R}$, excepto el conjunto de valores reales de x que anulan el denominador.

En el caso que nos ocupa el dominio es: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Las asíntotas horizontales son de la forma $y = k$, o sea, son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer más infinito o menos infinito.

La función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ no tiene asíntotas horizontales por lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 4 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-\infty - 4 - 0}{1 + 0} = -\infty$$

Como se observa, ambos límites son infinito.

Las asíntotas horizontales son de la forma $x = k$; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 1$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x} = \underline{1 = m}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 1 - x^2 + x}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 1 + x}{x - 1} = \underline{-3 = n}$$

La función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ tiene como asíntota oblicua la recta $y = x - 3$.

www.yoquieroaprobar.es

PROBLEMAS

1º) Una recta r pasa por el punto $A(3, 0, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 1, 4)$

a) Encuentre el ángulo que forma r con el plano horizontal.

b) Compruebe que no pasa por el punto $B(1, 3, 10)$.

c) Encuentre la ecuación de la recta s que pasa por A y B .

a)

La recta r forma con el plano horizontal el ángulo complementario que forma con cualquier vector vertical, por ejemplo con el vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Del concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Aplicando la fórmula anterior al caso que nos ocupa y teniendo en cuenta que el seno de un ángulo es igual al coseno del complementario y considerando el primer párrafo del apartado, resulta:

$$\sin \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{(-1, 1, 4) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-0 + 0 + 4}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = 0'9428 = \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsin 0'9428 = \underline{\underline{70^\circ 31' 44'' = \alpha}}$$

b)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases}$.

Si pasara por el punto $B(1, 3, 10)$ el valor de λ tiene que ser 3, según se deduce del valor de y , pero para $\lambda = 3$ resulta el punto $P(0, 3, 14)$, lo cual justifica que el punto B no pertenece a la recta r , c. q. c.

c)

Los puntos $A(3, 0, 2)$ y $B(1, 3, 10)$ determinan el vector $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-2, 3, 8)$, que es director de la recta s .

La expresión vectorial de s es: $s \equiv (x, y, z) = (3, 0, 2) + \lambda(-2, 3, 8)$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Considere la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

a) Calcule c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal.

b) Para el valor c encontrado en el apartado anterior, calcule a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -2$ y que corta al eje OX cuando $x = 1$.

c) Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcule los intervalos donde la función crece y decrece, sus extremos relativos y dibuje una representación gráfica aproximada.

a)

La tangente de una función en un punto tiene como pendiente el valor de la derivada de la función en ese punto; si la tangente es horizontal, su pendiente es cero para el valor de $x = 0$:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad m = f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}$$

b)

Para $c = 0$ la función es $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7$.

Por tener un extremo relativo para $x = -2$ es necesario que se anule su primera derivada para el valor dado:

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx \Rightarrow f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 2b \cdot (-2) = -4 \cdot 8 - 4b = -32 - 4b = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{b = -8}}$$

La función resulta ser $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x^2 + 7$.

Por cortar al eje OX para $x = 1$ es necesario que se anule la función para ese valor:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 7 = 0 \quad ; \quad 1 + a - 8 + 7 \quad ; \quad \underline{\underline{a = 0}}$$

$$\underline{\underline{\text{La función es: } f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}}$$

Se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje OY.

c)

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que por ser una función polinómica es continua y derivable en su dominio, que es $\mathbb{R}$, para estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento basta con estudiar un valor de cualquiera de los intervalos que determinan los valores que anulan la primera derivada, por ejemplo, $x = 1$:

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow f'(1) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

$$f'(x) = 4x(x+2)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, -2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \\ (-2, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \\ (0, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \\ (2, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \end{cases}$$

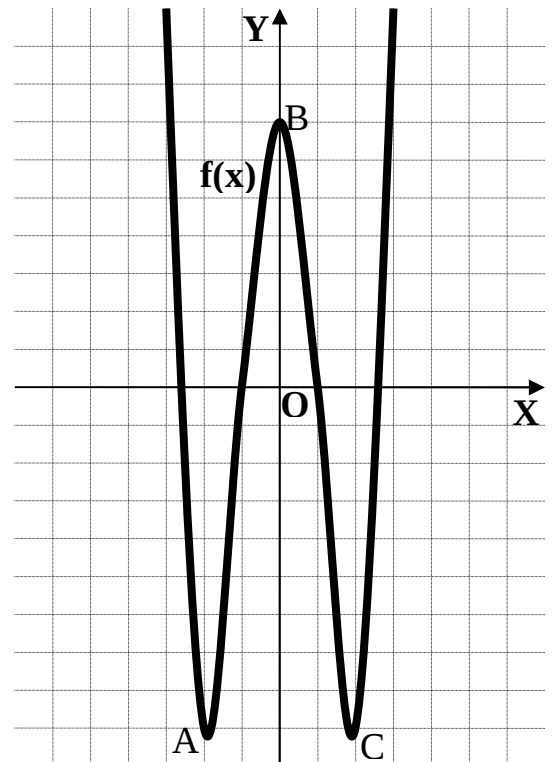
Para determinar los máximos y mínimos relativos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 0 \\ f''(2) = 48 - 16 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 2 \\ f''(-2) = 48 - 16 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \text{Mín.} \Rightarrow \underline{\underline{A(-2, -9)}} \\ f(0) = 7 \Rightarrow \text{Máx.} \Rightarrow \underline{\underline{B(0, 7)}} \\ f(2) = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \text{Mín.} \Rightarrow \underline{\underline{C(2, -9)}} \end{cases}$$

La representación gráfica aproximada es la que se indica en la figura adjunta.



OPCIÓN B

CUESTIONES

1ª) Considere la función definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calcule cuánto vale la pendiente de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$. Averigüe si hay otros puntos en los que la pendiente de la tangente sea igual a la obtenida.

El punto de tangencia tiene por abscisa $x = 0$ y por coordenada el valor de la función para $x = 0$, o sea, $f(0)$: $f(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 1} = 1 \Rightarrow \underline{P(0, 1)}$.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = f'(x)$$

$$m = f'(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{(0+1)^2} = \frac{-1}{1} = \underline{-1 = m}$$

El valor de la pendiente para $x = 0$ es $m = -1$.

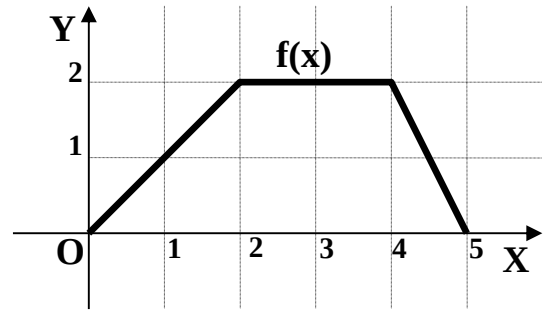
Veamos si existen otros puntos donde la pendiente (derivada) vale, también, -1:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -1 \quad ; \quad x^2 + 2x - 1 = -(x+1)^2 = -(x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 2x - 1 \quad ; \quad 2x^2 + 4x = 0 \quad ;$$

$$2x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 1} = 1 \Rightarrow \underline{P(0, 1)} \quad (\text{Punto estudiado}) \\ x_2 = -2 \rightarrow f(-2) = \frac{(-2)^2 + 1}{-2 + 1} = \frac{4 + 1}{-1} = -5 \Rightarrow \underline{Q(-2, -5)} \end{cases}$$

En el punto $Q(-2, -5)$ la pendiente a la función también es $m = -1$.

2ª) Considere la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0, 5]$ que aparece dibujada en la figura adjunta.



a) ¿Cuál es la expresión de su función derivada cuando existe?

b) Calcule $\int_0^3 f(x) \cdot dx$.

a)

La función puede definirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{2}x & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$.

La función derivada resulta ser: $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$.

b)

De la observación de la figura se deduce que:

$$\int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot dx + \int_2^3 2 \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + [2x]_2^3 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + (2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 2 + 6 - 4 = 4.$$

$$\int_0^3 f(x) \cdot dx = 4 \text{ u}^2$$

3ª) Determine la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$. ¿Qué distancia separa este punto del origen de coordenadas?

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \quad ; \quad \underline{x = -2 - \lambda} \quad ; \quad y = x - 1 = \underline{-3 - \lambda} = y \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{v} = (-1, -1, 1)$.

Si el plano π tiene que ser perpendicular a la recta tiene que tener como vector normal cualquier director que sea linealmente dependiente de $\vec{v} = (-1, -1, 1)$, como por ejemplo el vector $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

El haz de los infinitos planos perpendiculares a la recta r tiene por ecuación general la expresión $\alpha \equiv x + y - z + D = 0$, de los cuales el plano π pedido tiene que satisfacer su ecuación para el punto $P(1, 1, 2)$:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv x + y - z + D = 0 \\ P(1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 - 2 + D = 0 \quad ; \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

La distancia del punto $P(1, 1, 2)$ al origen de coordenadas es igual que el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = P - O = (1, 1, 2) - (0, 0, 0) = (1, 1, 2)$, es decir:

$$d = \overline{OP} = \left| \overrightarrow{OP} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+4} = \underline{\underline{\sqrt{6} \text{ unidades} = d}}$$

4ª) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para los que el rango de la matriz A es menor que 3. ¿Puede ser Rang A = 1 para algún valor de m?

Para que el rango de la matriz A sea menor que 3 es necesario que su determinante sea cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4m + m^2 = m^2 - 4m + 3 = 0 \quad ; \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

Para m = 3 y m = 1 el rango de la matriz A es menor que 3.

El rango de la matriz A no puede ser 1, independientemente de los valores que tome m, ya que el menor correspondiente a la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, lo que significa que el menor rango que puede tener la matriz A es dos.

PROBLEMAS

1º) Dada la función $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

- a) Encuentre su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.
- b) Encuentre los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.
- c) Encuentre sus posibles asíntotas
- d) Haga la representación gráfica aproximada de la función.

a)

La función está definida para cualquier valor real de x: $D(f) \Rightarrow R$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje X $\Rightarrow y = f(x) = 0$;; $e^{-x^2+2x} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow$ La función no corta al eje X.

Eje Y $\Rightarrow x = 0$;; $y = e^{-0^2+2 \cdot 0} = e^0 = 1 \Rightarrow$ A(0, 1)

b)

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen del estudio de la primera derivada:

$$f'(x) = (-2x + 2) \cdot e^{-x^2+2x} = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \quad ; \quad -2(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{x=1}$$

Por tratarse de una función exponencial, es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual, para determinar el crecimiento y decrecimiento estudiamos un punto de uno de los intervalos que determina la raíz de la derivada, por ejemplo, para el valor de $x = 0$:

$$f'(0) = (-0 + 2) \cdot e^0 = 2 \cdot e = 2e > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \\ \text{Para } x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \end{cases}$$

Para determinar si el valor que anula la primera derivada es un máximo o un mínimo relativo recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2+2x} + (-2x + 2) \cdot (-2x + 2) \cdot e^{-x^2+2x} = e^{-x^2+2x} [-2 + (-2x + 2)^2] =$$

$$= e^{-x^2+2x} \cdot (-2 + 4x^2 - 8x + 4) = \underline{2(2x^2 - 4x + 1) \cdot e^{-x^2+2x} = f''(x)}$$

$$f''(1) = 2(2 - 4 + 1) \cdot e^{-1+2} = -2 \cdot e = -2e < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x=1}$$

$$f(1) = e^{-1^2+2 \cdot 1} = e \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx.} \Rightarrow B(1, e)}}$$

c)

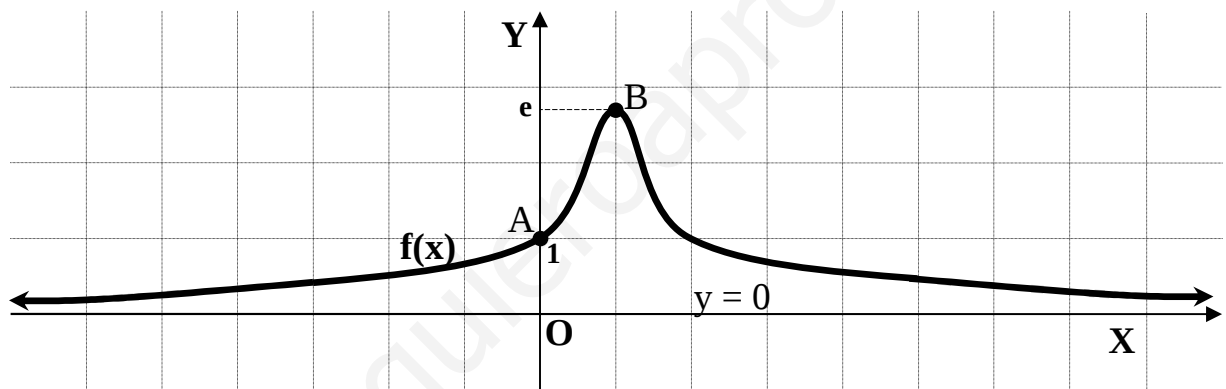
Por tratarse de una función exponencial, las posibles asíntotas son horizontales, que son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = \underline{0 = y}$$

La recta $y = 0$ (Eje X) es asíntota vertical.

d)

Con los datos anteriores puede hacerse una representación gráfica aproximada de la función, que es la siguiente:



2º) Considere la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + az + 2 = 0$, donde a es un parámetro.

a) Encuentre un vector director de la recta y un vector perpendicular al plano.

b) ¿Cuál tiene que ser el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos?

c) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano sean perpendiculares. En caso afirmativo, calcúlelos.

d) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano formen un ángulo de 30° . En caso afirmativo, calcúlelos.

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 3 + \lambda \\ x - 3y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 3 + \lambda \\ -2x + 6y = -4 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{y = -1 - \lambda} ; ;$$

$$x = 2 + z + 3y = 2 + \lambda + 3(-1 - \lambda) = 2 + \lambda - 3 - 3\lambda = \underline{-1 - 2\lambda = x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Vector director de r : $\vec{v} = (-2, -1, 1)$; ; vector normal al plano: $\vec{n} = (2, -1, a)$

b)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal al plano sean perpendiculares; es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-2, -1, 1) \cdot (2, -1, a) = -4 + 1 + a = 0 ; ; -3 + a = 0 ; ; \underline{a = 3}$$

Para que la recta y el plano sean paralelos el valor de a tiene que ser tres.

c)

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal al plano sean linealmente dependientes; es decir, que sean paralelos, para lo cual sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-2}{2} \neq \frac{-1}{-1} = \frac{1}{a} \Rightarrow \underline{\underline{La recta r y el plano no son \perp \forall a \in \mathbb{R}}}$$

d)

La recta r y el plano π forman un ángulo de 30° cuando el vector director de la

recta y el vector normal al plano formen un ángulo de 60° . Aplicando el producto escalar de dos vectores:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, -1, 1) \cdot (2, -1, a) = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + a^2} \cdot \frac{1}{2} ;;$$

$$-4 + 1 + a = \sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + a^2} \cdot \frac{1}{2} ;; 2(a - 3) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{5 + a^2} ;; 4(a - 3)^2 = 6(5 + a^2) ;;$$

$$2(a^2 - 6a + 9) = 3(5 + a^2) ;; 2a^2 - 12a + 18 = 15 + 3a^2 ;; a^2 + 12a - 3 = 0$$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 12}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{4 \cdot 39}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{2} = -6 \pm \sqrt{39} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -6 + \sqrt{39} \\ a_2 = -6 - \sqrt{39} \end{cases}$$
