

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO – 2009****MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

OPCIÓN A**CUESTIONES**

1ª) Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:

a) Encontrar la ecuación cartesiana (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r .

b) Hallar el punto Q de corte de la recta r con el plano π

a)

La recta r tiene como vector director a $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

El plano π , por ser perpendicular a r , tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\vec{v} = (2, 3, -1)$, o sea, que el vector normal puede ser el propio vector \vec{v} : $\vec{n} = (2, 3, -1)$.

La ecuación del haz de planos paralelos y perpendiculares a r tiene por ecuación cartesiana $\alpha \equiv 2x + 3y - z + D = 0$. De todo éstos infinitos planos, el plano π , que contiene al punto $P(1, 2, 3)$, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 3y - z + D = 0 \\ P(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + D = 0 \quad ; ; \quad 2 + 6 - 3 + D = 0 \quad ; ; \quad \underline{D = -5}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0}}$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$.

El punto Q de corte de r con π es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) - (5 - \lambda) - 5 = 0 \ ; ;$$

$$2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda - 5 + \lambda - 5 = 0 \ ; ; 14\lambda - 14 = 0 \ ; ; \lambda - 1 = 0 \ ; ; \underline{\lambda = 1}$$

$$\underline{Q(3, 1, 4)}$$

2ª) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que la inversa de A es A^2 .

b) Comprobar también que $A^{518} = B$.

a)

La inversa de la matriz A se obtiene mediante el Método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{A^2}$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = A^2, \text{ c. q. d.}}}$$

b)

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{A^3 = I}$$

La potencia n-ésima de A es igual que A elevado al resto de la división de n por tres. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{r} 518 \mid 3 \\ 21 \quad 172 \\ 08 \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\underline{\underline{A^{518} = A^2 = B, \text{ c. q. d.}}}$$

3ª) Se considera la función $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, con $a > 0$.

a) Encontrar los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje OX.

b) Comprobar que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas no depende del valor del parámetro a .

a)

Los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje OX son los valores de x que la anulan:

$$f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3} = 0 \Rightarrow x(a-x) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \ ; \ ; \ \underline{x_2 = a} \Rightarrow \underline{O(0, 0)} \ ; \ ; \ \underline{P(a, 0)}$$

b)

$$S = \left| \int_0^a f(x) \cdot dx \right| \Rightarrow \int_0^a f(x) \cdot dx = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3} \cdot dx = \frac{1}{a^3} \cdot \int_0^a (ax - x^2) \cdot dx = \frac{1}{a^3} \cdot \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{a^3} \cdot \left[\left(\frac{a \cdot a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) - \left(\frac{a \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$S = \left| \int_0^a f(x) \cdot dx \right| = \left| \frac{1}{6} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} = S$$

En efecto, el área del recinto no depende del parámetro a , como queríamos comprobar.

4ª) En la resolución del método de Gauss de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas nos hemos encontrado la matriz siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

a) Explique, razonadamente, cual es el carácter del sistema inicial.

b) Si es compatible, encontrad la solución.

a)

La matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$ es equivalente a $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$, cuyo rango es 2,

tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada, lo que supone, según el Teorema de Rouché-Fröbenius que el sistema es compatible indeterminado.

b)

Siendo el sistema $\left. \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z = -5 \\ 3y - 6z = 6 \end{array} \right\}$, su solución es la siguiente:

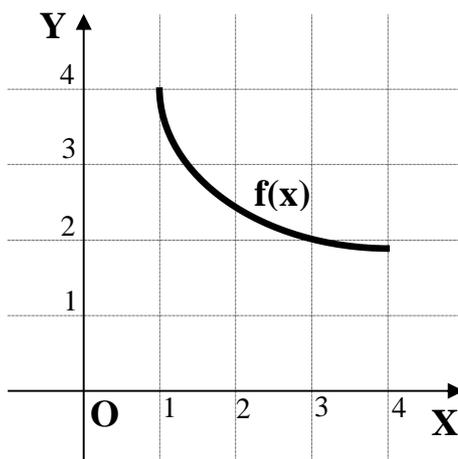
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z = -5 \\ 3y - 6z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \quad ; ; \quad 3y = 6 + 6\lambda \quad ; ; \quad \underline{y = 2 + 2\lambda} \quad ; ; \quad 3x = -5 + 5y - 2z =$$

$$= -5 + 5(2 + 2\lambda) - 2\lambda = -5 + 10 + 10\lambda - 2\lambda = 5 + 8\lambda = 3x \quad ; ; \quad \underline{x = \frac{5}{3} + \frac{8}{3}\lambda}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{8}{3}\lambda \\ y = 2 + 2\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

PROBLEMAS

1º) La gráfica de la función $f(x) = \frac{3+x}{x}$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$, es la de la figura:



- Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=3$.
- Dibuje el recinto limitado por la gráfica de la función y las dos rectas tangentes que ha calculado.
- Encontrad los vértices de ese recinto.
- Calculad la superficie del mencionado recinto.

a)

La ecuación de una recta conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, siendo m el valor de la pendiente.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+3) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - x - 3}{x^2} = \frac{-3}{x^2} = f'(x)$$

$$f'(1) = m_1 = \frac{-3}{1^2} = -3 = m_1 \quad ; ; \quad f'(3) = m_2 = \frac{-3}{3^2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} = m_2$$

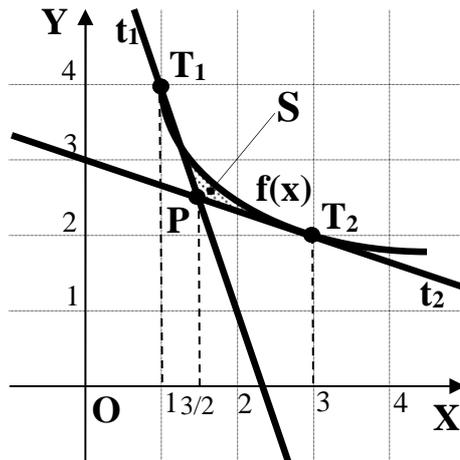
$$f(1) = \frac{3+1}{1} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow T_1(1, 4) \quad ; ; \quad f(3) = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow T_2(3, 2)$$

Las tangentes pedidas son las siguientes:

$$t_1 \Rightarrow y - 4 = -3(x - 1) = -3x + 3 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 3x + y - 7 = 0}}$$

$$t_2 \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \quad ; ; \quad 3y - 6 = -x + 3 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv x + 3y - 9 = 0}}$$

b)



c)

Los vértices del recinto son los puntos de tangencia T_1 y T_2 y el punto P , intersección de las tangentes t_1 y t_2 :

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y - 7 = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x - y + 7 = 0 \\ 3x + 9y - 27 = 0 \end{array} \Rightarrow 8y - 20 = 0 \quad ; ; \quad 8y = 20 \quad ; ; \quad 2y = 5 \quad ; ; \quad \underline{\underline{y = \frac{5}{2}}}$$

$$x + 3y - 9 = 0 \quad ; ; \quad x = 9 - 3y = 9 - 3 \cdot \frac{5}{2} = 9 - \frac{15}{2} = \frac{18 - 15}{2} = \frac{3}{2} = x \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Los vértices del recinto son } T_1(1, 3), T_2(3, 2) \text{ y } P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).}}$$

d)

Para el cálculo de la superficie tendremos en cuenta que las ordenadas correspondientes de la función en el intervalo $(1, 3)$, son mayores que las correspondientes de cada una de las rectas tangentes.

$$S = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3+x}{x} - (7-3x) \right] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[\frac{3+x}{x} - \left(\frac{9-x}{3} \right) \right] dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{x} + 1 - 7 + 3x \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[\left(\frac{3}{x} + 1 - 3 + \frac{x}{3} \right) \right] dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{x} + 3x - 6 \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[\left(\frac{3}{x} + \frac{x}{3} - 2 \right) \right] dx = \left[3Lx + \frac{3x^2}{2} - 6x \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[3Lx + \frac{x^2}{6} - 2x \right]_{\frac{3}{2}}^3 =$$

$$= \left[3L \frac{3}{2} + \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2}{2} - 6 \cdot \frac{3}{2} \right] - \left[3L1 + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right] + \left[3L3 + \frac{3^2}{6} - 2 \cdot 3 \right] - \left[3L \frac{3}{2} + \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^2}{6} - 2 \cdot \frac{3}{2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[3(L3 - L2) + \frac{27}{8} - 9 \right] - \left(3 \cdot 0 + \frac{3}{2} - 6 \right) + \left(3L3 + \frac{3}{2} - 6 \right) - \left[3(L3 - L2) + \frac{3}{8} - 3 \right] = \\
&= 3L3 - 3L2 + \frac{27}{8} - 9 - \frac{3}{2} + 6 + 3L3 + \frac{3}{2} - 6 - 3L3 + 3L2 - \frac{3}{8} + 3 = \frac{24}{8} + 3L3 - 6 = 3L3 - 3 = \\
&= 3(L3 - 1) \cong 3(1'099 - 1) = \underline{\underline{0'296 u^2 = S}}
\end{aligned}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$, dependientes de un parámetro b:

- a) Encuentre los puntos de corte de las recta r y s con el plano de ecuación $x = 0$.
 b) Calcule un vector director de cada una de las rectas.
 c) Estudie la posición relativa de las dos rectas en función del parámetro b.

a)

El punto P de corte de la recta r con el plano $x = 0$ se obtiene resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan:

$$r \equiv \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ \underline{x = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 \\ 2y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 6z = 2 \\ -2y - 5z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 1} \quad ; \quad y = 1 - 3z = 1 - 3 = \underline{-2} = y$$

$$\underline{\underline{P(0, -2, 1)}}$$

La expresión de s por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} (b+1)x = y-b \\ -x = z+1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} (b+1)x - y = -b \\ x + z = -1 \end{cases}}}$$

El punto Q de corte de la recta s con el plano $x = 0$ se obtiene resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan:

$$s \equiv \begin{cases} (b+1)x - y = -b \\ x + z = -1 \\ \underline{x = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -b \\ \underline{z = -1} \end{cases} \Rightarrow \underline{y = b}$$

$$\underline{\underline{Q(0, b, -1)}}$$

b)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 1 - b\lambda \\ 2y + 5z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 6z = 2 - 2b\lambda \\ -2y - 5z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 1 + (1 - 2b)\lambda}$$

$$y = 1 - b\lambda - 3z = 1 - b\lambda - 3 - 3(1 - 2b)\lambda = -2 - b\lambda - 3\lambda + 6b\lambda = \underline{-2 + (5b - 3)\lambda} = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + (5b - 3)\lambda \\ z = 1 + (1 - 2b)\lambda \end{cases}$$

Dos vectores directores de r y s pueden ser, respectivamente, los siguientes:

$$\underline{\underline{\vec{v}_r}} = (1, 5b - 3, 1 - 2b) \quad \text{y} \quad \underline{\underline{\vec{v}_s}} = (1, b + 1, -1)$$

c)

Realizamos el estudio de la posición relativa de las dos rectas mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ b+1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} b & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ b+1 & -1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Según los rangos de A y A' pueden presentarse los casos siguientes:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 \rightarrow \underline{\text{Coincidentes}}$$

$$\text{Rango } A = 2 \text{ ; ; } \text{Rango } A' = 3 \rightarrow \underline{\text{Paralelas}}$$

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 \rightarrow \underline{\text{Secantes}}$$

$$\text{Rango } A = 3 \text{ ; ; } \text{Rango } A' = 4 \rightarrow \underline{\text{Se cruzan}}$$

Empezamos calculando el rango de A':

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} b & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ b+1 & -1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \rightarrow C_1 + C_4 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} b+1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \end{cases} \Rightarrow -2 \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 0 & 4-b \\ 2 & 0 & 3-b \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} = \\ &= +2 \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 4-b \\ 2 & 3-b \end{vmatrix} = 2[(b+2)(3-b) - 2(4-b)] = 2(3b - b^2 + 6 - 2b - 8 + 2b) = -2(b^2 - 3b + 2) = 0. \end{aligned}$$

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{b_1 = 1} \ ; \ ; \ ; \ \underline{b_2 = 2}.$$

Para $\begin{cases} b \neq 1 \\ b \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3 \ ; \ ; \ ; \ \text{Rango } A' = 4 \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan}$

$$\text{Para } b=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 10 - 12 + 5 = 15 - 15 = 0 \\ \{F_1, F_2, F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 - 6 - 1 = 7 - 7 = 0 \\ \{F_2, F_3, F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 5 - 4 = 5 - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } b=1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 + 5 + 6 =$$

$$= 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

Para $b=1 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \ ; \ ; \ ; \ \text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ son paralelas}$

$$\text{Para } b=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 15 - 18 + 10 = 25 - 21 = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 3}.$$

Para $b=2 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cortan}$
