

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO – 2012**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1ª) Diga para que valores de  $m$  los planos  $\pi_1 \equiv x - y + mz = 1$ ,  $\pi_2 \equiv x - y + z = m$  y  $\pi_3 \equiv my + 2z = 3$  tienen como intersección una recta.

-----

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan los tres planos dados son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de  $M$  y  $M'$  en función de  $m$  son los siguientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = -2 + m^2 - m + 2 = 0 \quad ; \quad m^2 - m = 0 \quad ; \quad m(m-1) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \quad ; \quad \underline{m_2 = 1}.$$

Para  $m = 0$  es  $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  cuyo rango, teniendo en cuenta que  $C_1 = -C_2$  es

el siguiente:  $\{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 3.$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan determinando tres rectas.

Para  $m = 1$  es  $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es dos, por tener dos filas iguales

(que son dos planos coincidentes), por lo tanto:

Para  $m = 1$  hay dos planos coincidentes y secantes al tercero determinando una recta.

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2ª) Dadas la recta  $y = 3x + b$  y la parábola  $y = x^2$ :

a) Calcule los puntos en que la tangente a la parábola es paralela a la recta dada.

b) Calcule el valor del parámetro  $b$  para que la recta sea tangente a la parábola.

-----

a)

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada de la curva en ese punto. La pendiente de la recta dada es  $m = 3$ .

$$y' = 2x = 3 \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}. \text{ Existe un solo punto de tangencia que es: } \underline{\underline{P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}}.$$

b)

Para que la recta  $y = 3x + b$  sea tangente a la parábola  $y = x^2$  es necesario que pase por el punto de tangencia, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{3}{2} + b \;; \; 9 = 18 + 4b \;; \; 4b = -9 \;; \; \underline{\underline{b = -\frac{9}{4}}}.$$

\*\*\*\*\*

3ª) Dado el plano  $\pi \equiv x - y + 2z - 5 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$ :

a) Calcule el punto de intersección del plano y la recta.

b) Encuentre la ecuación continua de la recta s contenida en el plano  $\pi$ , que es perpendicular a la recta r y corta a la recta r.

-----

a)

El punto de intersección del plano y la recta es la solución del sistema que forman, que es:  $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$ . Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 - 10 - 20 + 5}{1 - 2 - 2 - 4 + 1 + 1} = \frac{-20}{-5} = \underline{4 = x}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{20 + 10 - 10 - 5}{-5} = \frac{15}{-5} = \underline{-3 = y}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{10 - 5 - 10 + 10}{-5} = \frac{5}{-5} = \underline{-1 = z}.$$

El punto de corte es P(4, -3, -1).

b)

Un vector director de la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que lo determinan, que son  $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$  y  $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$ .

$$\vec{v}'_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j - k - 2k + i - j = 2i + j - 3k \Rightarrow \vec{v}'_r = (2, 1, -3).$$

El haz de planos  $\alpha$  perpendiculares a  $r$  tiene como vector normal al vector director de la recta  $r$ ; su expresión general es  $2x + y - 3z + D = 0$ .

De todos los infinitos planos del haz  $\alpha$ , el plano  $\beta$  que contiene al punto  $P$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 3z + D = 0 \\ P(4, -3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 4 - 3 - 3 \cdot (-1) + D = 0 \ ; \ ; \ 8 - 3 + 3 + D = 0 \ ; \ ; \ \underline{D = -8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x + y - 3z - 8 = 0}.$$

La recta  $s$  pedida es la intersección de los planos  $\pi$  y  $\beta$ :  $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$ . La expresión de  $s$  por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 5 - 2\lambda \\ 2x + y = 8 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 13 + \lambda \ ; \ ; \ x = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 5 - 2\lambda \ ; \ ; \ y = x - 5 + 2\lambda = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}\lambda - 5 + 2\lambda = \underline{\underline{-\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\lambda}} = y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - \frac{13}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{y + \frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{z}{1} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \frac{3x - 13}{1} = \frac{2y + 2}{7} = \frac{z}{1}}}.$$

Otra forma de resolver el apartado es la siguiente:

Tres puntos del plano  $\pi \equiv x - y + 2z - 5 = 0$  son  $A(0, -5, 0)$ ,  $B(5, 0, 0)$  y  $C(3, 0, 1)$ , y estos puntos determinan los vectores  $\overrightarrow{AB} = (5, 5, 0) \equiv (1, 1, 0)$  y  $\overrightarrow{AC} = (3, 5, 1)$ , que son directores del plano  $\pi$ .

La expresión de  $\pi$  por unas ecuaciones paramétricas es  $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda + 3\mu \\ y = -5 + \lambda + 5\mu \\ z = \mu \end{cases}$ .

Un punto genérico de  $\pi$  es  $Q(\lambda + 3\mu, -5 + \lambda + 5\mu, \mu)$ .

Los puntos  $P$  y  $Q$  determinan el vector  $\overrightarrow{PQ} = (-4 + \lambda + 3\mu, -2 + \lambda + 5\mu, 1 + \mu)$ .

Los vectores  $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -3)$  y  $\overrightarrow{PQ} = (-4 + \lambda + 3\mu, -2 + \lambda + 5\mu, 1 + \mu)$  son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{PQ} = (2, 1, -3) \cdot (-4 + \lambda + 3\mu, -2 + \lambda + 5\mu, 1 + \mu) = -8 + 2\lambda + 6\mu - 2 + \lambda + 5\mu - 3 - 3\mu =$$

$$= -13 + 3\lambda + 8\mu = 0 \Rightarrow \text{Por ejemplo: } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 6 = 5 \\ y = -5 - 1 + 10 = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{Q(5, 4, 2)}.$$

$$\vec{v}_s = \vec{PQ} = (5, 4, 2) - (4, -3, -1) = \underline{(1, 7, 3)}.$$

Teniendo en cuenta que la recta  $s$  contiene al punto  $P(4, -3, -1)$ , su expresión por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+1}{3}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ :

a) Compruebe que se cumple la igualdad  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ .

b) ¿Es cierta la igualdad anterior para cualquier par de matrices cuadradas A y B del mismo orden? Responder razonadamente utilizando las propiedades generales de las operaciones con matrices, sin utilizar matrices A y B concretas.

a)

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \underline{4I = A+B}.$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \underline{A-B}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2 & 6+2 \\ -3-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \underline{A^2}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -2-6 \\ 1+3 & -2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \underline{B^2}.$$

$$(A+B)(A-B) = 4I \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} = \underline{(A+B)(A-B)}.$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} = \underline{A^2 - B^2}.$$

Como hemos comprobado,  $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ .

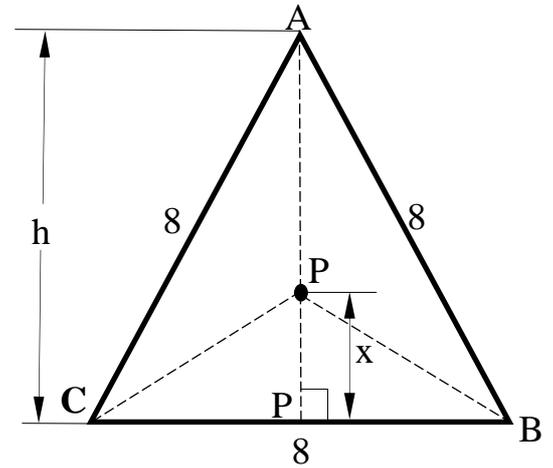
b)

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2.$$

Teniendo en cuenta que el producto de matrices, en general, no tiene la propiedad conmutativa, la igualdad dada no se cumple generalmente.

\*\*\*\*\*

5ª) Un triángulo equilátero de vértices A, B y C tiene un lado de 8 cms. Sitúe un punto P sobre una de las alturas del triángulo, a una distancia x de la base correspondiente:



a) Calcule la altura del triángulo de vértices A, B y C.

b) Indique la distancia del punto P a cada uno de los vértices (en función de x).

c) Determine el valor de x para que la suma de los cuadrados de las distancias del punto P a cada uno de los tres vértices sea mínima.

-----

a)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo APB:

$$8^2 = h^2 + 4^2 \quad ; \quad h^2 = 64 - 16 = 48 \quad ; \quad h = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \underline{\underline{4\sqrt{3} \text{ cms} = h}}.$$

b)

$$\overline{AP} = h - x = \underline{\underline{4\sqrt{3} - x = \overline{AP}}} \quad ; \quad \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 = x^2 + 4^2 = x^2 + 16 \quad ; \quad \underline{\underline{\overline{BP} = \overline{CP} = \sqrt{x^2 + 16}}}.$$

c)

$$S = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = (4\sqrt{3} - x)^2 + 2 \cdot (x^2 + 16) = 48 - 8\sqrt{3}x + x^2 + 2x^2 + 32 = \underline{\underline{3x^2 - 8\sqrt{3}x + 90}}.$$

Para que S sea mínima es necesario que se anule su derivada y, para los valores que la anulan, sea positiva la segunda derivada.

$$S' = 6x - 8\sqrt{3} = 0 \quad ; \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cms} = x = \frac{h}{2}}}.$$

$$S'' = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo para } x = \frac{4\sqrt{3}}{3}}}.$$

El valor de x pedido es la mitad de la altura.

\*\*\*\*\*

6ª) Dados los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3) y S(1, 2, 3):

a ) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del plano que contenga a los puntos P, Q y R.

b ) Compruebe si los cuatro puntos son coplanarios (es decir, si los cuatro puntos están contenidos en un mismo plano).

-----

a )

Los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 3) determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (1, 0, 0) - (0, 2, 0) = (1, -2, 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{RP} = P - R = (1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (1, 0, -3).$$

La expresión general o cartesiana del plano  $\pi$  que determinan los puntos P, Q y R es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 6(x-1) + 2z + 3y = 0 \quad ;; \quad 6x - 6 + 3y + 2z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}}$$

b )

Para que los puntos P, Q, R y S sean coplanarios es necesario que el punto S esté contenido en el plano, o sea, que satisfaga su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ S(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6 = 0 \quad ;; \quad 6 + 6 + 6 - 6 = 0 \quad ;; \quad \underline{12 = 0??}.$$

El punto S no pertenece al plano  $\pi$  y, en consecuencia:

Los puntos P, Q, R y S no son coplanarios.

\*\*\*\*\*