

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2013**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Sea $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre el valor o los valores de α para que V sea linealmente dependiente.

b) Cuando $\alpha = 4$, exprese el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ como combinación lineal de los vectores de V .

a)

Para que los vectores de V sean linealmente dependientes es condición necesaria que sea nulo el valor del determinante que forman, lo que significa que el rango que tengan sea menor que tres.

$$\text{Rango } V \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a - 4 + 1 + 2a = 3a - 3 = 3(a - 1) = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

Los vectores de V sean linealmente dependientes únicamente para $\alpha = 1$.

b)

$$\vec{v} = (3, 9, 14) = x \cdot (-1, 1, 1) + y \cdot (-2, -1, 0) + z \cdot (1, 2, 4) \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 9 \\ x + 4z = 14 \end{cases}.$$

Sumando la primera ecuación a las otras dos resulta el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -3y+3z=12 \\ -2y+5z=17 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 6y-6z=-24 \\ -6y+15z=51 \end{array} \right\} \Rightarrow 9z=27 ;; \underline{z=3} ;; -y+z=4 ;; -y+3=4 ;; \underline{y=-1}.$$

$$-x-2y+z=3 ;; -x+2+3=3 ;; \underline{x=2}.$$

$$\underline{\underline{\vec{v}=(3, 9, 14)=2 \cdot (-1, 1, 1)-(-2, -1, 0)+3 \cdot (1, 2, 4)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2ª) De la función polinómica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabemos que tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la integral definida en el intervalo $[0, 1]$ vale $-5/4$. Calcule el valor de los parámetros a y b .

Para que una función tenga un extremo relativo para un valor determinado es condición necesaria que se anule su derivada para ese valor.

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow P'(-3) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-3)^2 + 2a \cdot (-3) + b = 0 \;; \; 27 - 6a + b = 0 \;;$$

$$\underline{6a - b = 27} \quad (1)$$

$$\int_0^1 P(x) \cdot dx = -\frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x \right]_0^1 = -\frac{5}{4} \;;$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 \right) - 0 = -\frac{5}{4} \;; \; \frac{3 + 4a + 6b + 24}{12} = -\frac{5}{4} \;; \; \frac{4a + 6b + 27}{3} = -5 \;; \; 4a + 6b + 27 = -15 \;;$$

$$4a + 6b = -42 \;; \; \underline{2a + 3b = -21} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 6a - b = 27 \\ 2a + 3b = -21 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 18a - 3b = 81 \\ 2a + 3b = -21 \end{array} \right\} \Rightarrow 20a = 60 \;; \; \underline{\underline{a = 3}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 6a - b = 27 \\ 2a + 3b = -21 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -6a + b = -27 \\ 6a + 9b = -63 \end{array} \right\} \Rightarrow 10b = -90 \;; \; \underline{\underline{b = -9}}.$$

3ª) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 3$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$:

a) Compruebe que el vector característico (o normal) de π y el vector director de r son perpendiculares.

b) Estudie la posición relativa de π y r en función del parámetro m .

a)

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 2, -1)$ y el vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 1, 4)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, -1) \cdot (2, 1, 4) = 2 + 2 - 4 = 0$$

El vector normal de π y el vector director de r son perpendiculares, c.q.c.

b)

Según que la recta r y el plano π tengan infinitos puntos en común, un punto en común o ningún punto en común, la recta está contenida en el plano, son secantes o son paralelos, respectivamente.

La expresión de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$ por unas ecuaciones continuas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x-1=2y \\ 4y=z+m \end{cases}$, o mejor: $r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ 4y-z=m \end{cases}$.

El plano π y la recta r determinan el sistema:
$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-2y=1 \\ 4y-z=m \end{cases}$$
.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & m \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de ampliada en función de m es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & m \end{vmatrix} = -2m + 12 - 4 - 2m = 8 - 4m = 4(2 - m) \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} = -3 + 1 + m = m - 2 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & m \end{vmatrix} = 6 - 4 + 2 - 2m = 4 - 2m = 2(2 - m) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Para $m = 2 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

Para $m \neq 2 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 ; \text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

Para $m = 2$ el plano π contiene a la recta r .

Para $m \neq 2$ el plano π y la recta r son secantes (perpendiculares según apartado a).

4ª) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix}$, donde α , b y c son parámetros reales. Calcule el valor de estos parámetros para que ninguna de las tres matrices tenga inversa.

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{vmatrix} = 10b + c + 12a - 3b - 5a - 8c = 7a + 7b - 7c = 0 \quad ; \quad \underline{a + b - c = 0}. \quad (1)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{vmatrix} = 15c + 8a + 12b - 32c - 15a - 3b = \underline{-7a + 9b - 17c = 0}. \quad (2)$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{vmatrix} = -20 + 7a - 20b + 35b + 10a - 8 = \underline{17a + 15b = 28}. \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -7a + 9b - 17c = 0 \\ 17a + 15b = 28 \end{cases}$$

De las ecuaciones (1) y (2): $a + b = \frac{-7a + 9b}{17}$; $17a + 17b = -7a + 9b$; $24a + 8b = 0$;

$3a + b = 0$; $\underline{b = -3a}$. Sustituyendo este valor en la ecuación $17a + 15b = 28$:

$$17a + 15 \cdot (-3a) = 28 \quad ; \quad 17a - 45a = 28 \quad ; \quad -28a = 28 \quad ; \quad \underline{a = -1} \quad ; \quad \underline{b = 3} \quad ; \quad \underline{c = 2}.$$

Las matrices A, B y C no tienen inversas para $\alpha = -1$, $b = 3$ y $c = 2$.

5ª) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 8 = 0$ y el punto $P(6, -3, 7)$:

a) Encuentre la ecuación continua de la recta que pasa por P y es perpendicular a π .

b) Encuentre el punto del plano π que está más cerca del punto P.

a)

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, -1, 3)$, que también es director de la recta r pedida.

La expresión de r dada por una ecuación continua es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}}}$$

b)

El punto del plano π que está más cerca del punto P es el punto Q, intersección de la recta r con el plano π .

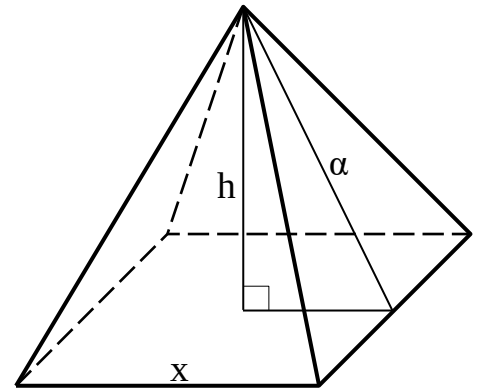
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot (6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3 \cdot (7 + 3\lambda) - 8 = 0 ;;$$

$$12 + 4\lambda + 3 + \lambda + 21 + 9\lambda - 8 = 0 ;; 28 + 14\lambda = 0 ;; 2 + \lambda = 0 ;; \underline{\underline{\lambda = -2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 4 = 2 \\ y = -3 + 2 = -1 \\ z = 7 - 6 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q(2, -1, 1)}}$$

6ª) Se quiere construir una tienda en forma de pirámide regular de base cuadrada. Disponemos de 300 m² de tela para la fabricación de las cuatro caras de la tienda (se supone que en la elaboración de las caras no se pierde tela). Designamos por x la longitud de un lado de la base de la tienda.



a) Sabiendo que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, comprueba, en este caso: $V(x) = \frac{x \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}$.

b) Determine el valor de x para que el volumen sea lo mayor posible (no es necesario que compruebe que el valor obtenido corresponde realmente a un máximo).

a)

La superficie de una cara lateral es $S_{L1} = \frac{a \cdot x}{2}$. (1)

La superficie lateral de la pirámide es $S_L = 4 \cdot S_{L1} = 4 \cdot \frac{a \cdot x}{2} = 2 \cdot a \cdot x = 300 \Rightarrow a = \frac{150}{x}$.

Del triángulo rectángulo de la figura se deduce aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \;; \left(\frac{150}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \;; \frac{22500}{x^2} = \frac{x^2}{4} + h^2 \;; h^2 = \frac{22500}{x^2} - \frac{x^2}{4} =$$

$$= \frac{90000 - x^4}{4x^2} = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{90000 - x^4}{4x^2}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}.$$

$$V(x) = \frac{x^2 \cdot h}{3} = \frac{x^2 \cdot \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}}{3} = \frac{x \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6} = V(x), \text{ como queríamos comprobar.}$$

b)

El volumen el máximo cuando su primera derivada es cero:

$$V(x) = \frac{x \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 \cdot x^2 - x^6} \Rightarrow V'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{18 \cdot 10^4 \cdot x - 6x^5}{2 \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 \cdot x^2 - x^6}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^4 \cdot x - x^5}{2x \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}} = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2 \cdot \sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 10^4 - x^4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} \text{ m} \approx 13'16 \text{ m}.$$
