

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDADES DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2015**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ .

a) Determine para qué valores de  $a$  existe  $A^{-1}$ .

b) Calcule  $A^{-1}$  para  $a = 0$ .

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$A$  es invertible  $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$ .

b)

Para  $a = 0$  es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $|A| = 1$  y  $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

\*\*\*\*\*

2º) En el espacio tridimensional considere la recta  $r: (x, y, z) = (3 + 2a, -a, 3 - a)$  y los planos  $\pi_1 \equiv x + y + z = -1$  y  $\pi_2 \equiv (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$ .

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del plano  $\pi_2$ .

b) Encuentre los dos puntos de la recta  $r$  que equidistan de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano de ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$  con la expresión  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

a)

Dos vectores directores de  $\pi_2$  son  $\vec{u} = (1, 1, 0)$  y  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  y un punto de este plano es  $P(2, 1, 0)$ .

$$\pi_2(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -(x - 2) + z - (y - 1) = 0;$$

$$-x + 2 + z - y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0}.$$

b)

Un punto genérico de  $r$  es  $Q(3 + 2a, -a, 3 - a)$ .

$$d(Q, \pi_1) = \frac{|3 + 2a - a + 3 - a + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|3 + 2a - a - 3 + a - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2a - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|2a - 3|}{\sqrt{3}}.$$

$$d(Q, \pi_1) = d(Q, \pi_2) \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{|2a - 3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |2a - 3| = 7 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - 3 = 7 \\ -2a + 3 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$2a = 10 \rightarrow \mathbf{a_1 = 5}; \quad -2a + 3 = 7; \quad 2a = -4 \rightarrow \mathbf{a_2 = -2}.$$

Los puntos pedidos son:  $Q_1(13, -5, -2)$  y  $Q_2(-1, 2, 5)$ .

\*\*\*\*\*

3º) Sea la función  $f(x) = e^x - x - 2$ :

a) Demuestre que la función  $f$  tiene una raíz (un cero) en el intervalo  $[0, 2]$ .

b) Compruebe que la función es monótona en el intervalo  $[0, 2]$  y calcule las coordenadas de los puntos mínimo absoluto y máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

-----

a)

La función  $f(x) = e^x - x - 2$  es continua en su dominio, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, al intervalo  $[0, 2]$ :

$$f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 = 7,39 - 4 = 3,39 > 0.$$

Lo anterior demuestra que la función  $f(x)$  tiene una raíz en  $[0, 2]$ , c. q. d.

b)

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0, \forall x \in [0, 2].$$

Lo anterior prueba que  $f(x)$  es mononota creciente en  $[0, 2]$ .

$$\text{Máximo absoluto de } f(x) \text{ en } [0, 2] \Rightarrow f(2) = 3,39 \Rightarrow \underline{A(2, 3'39)}.$$

$$\text{Mínimo absoluto de } f(x) \text{ en } [0, 2] \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow \underline{B(0, -1)}.$$

\*\*\*\*\*

4º) Sean los planos de  $\mathbb{R}^3$   $\pi_1 \equiv -y + z = 2$ ,  $\pi_2 \equiv -2x + y + z = 1$  y  $\pi_3 \equiv 2x - 2z = -1$ .

a) Calcule la posición relativa de los tres planos.

b) Compruebe que el plano  $\pi_3$  es paralelo a la recta definida por la intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

a)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. --  $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$  Los planos se cortan en un punto.

2º. --  $\text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$  Los planos son secantes dos a dos.

3º. --  $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$  Los planos se cortan en una recta.

4º. --  $\text{Rang } M = 1; \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$  Los planos son paralelos.

5º. --  $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 \Rightarrow$  Los planos son coincidentes.

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2.$$

$$\text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Los planos son secantes dos a dos (no hay planos paralelos).

b)

Los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  determinan la recta  $r \equiv \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Un vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes:  $\vec{n}_1 = (0, 1, -1)$  y  $\vec{n}_2 = (2, -1, -1)$ .

$$\vec{v}'_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -i - 2j - 2k - i = -2i - 2j - 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1).$$

El vector normal del plano  $\pi_3$  es  $\vec{n}_3 = (2, 0, -2)$ .

La recta  $r$  es paralela al plano  $\pi_3$  cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, que su producto escalar es nulo:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_3 = (1, 1, 1) \cdot (2, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = \mathbf{0}.$$

Queda comprobado que la recta  $r$  es paralela al plano  $\pi_3$ .

\*\*\*\*\*

5º) Sean  $x$  e  $y$  las medidas de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 2.

a) Compruebe que la superficie del rectángulo, en función de  $x$ , viene dada por la expresión  $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ .

b) Calcule los valores de las medidas de  $x$  e  $y$  para los cuales la superficie del rectángulo es máxima y calcule el valor de esta superficie máxima.

a)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow 2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}.$$

La superficie del rectángulo es:  $S = x \cdot y$ .

Sustituyendo en la fórmula de la superficie el valor de  $y$  obtenido:

$$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x^2 - x^4}, \text{ como se quería comprobar.}$$

b)

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4x - 2x^3}{x\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0; 4 - 2x^2 = 0;$$

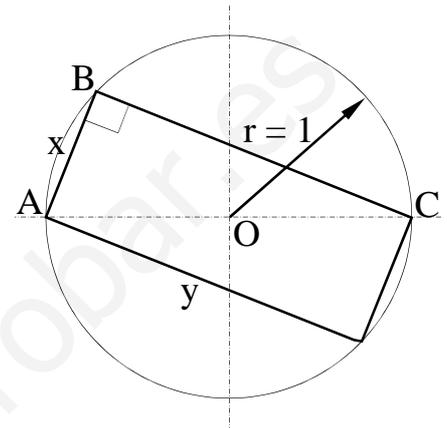
$$2 - x^2 = 0; x = \pm\sqrt{2} \text{ (La solución negativa no tiene sentido lógico).}$$

$$x = \sqrt{2}. \text{ El valor de } y \text{ es el siguiente: } y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} = x.$$

El rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado  $\sqrt{2}$  unidades.

El valor de la superficie del rectángulo es de  $2 u^2$ .

\*\*\*\*\*



6º) Encuentre todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  que sean inversas de ellas mismas, es decir, que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

-----

$$A^2 = I \Rightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases}$$

$$a = \pm 1; ab + b = 0; b(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \rightarrow b = 0 \\ a = -1 \rightarrow b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluciones:  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \forall b \in \mathbb{R}.$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es