

**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)****UNIVERSIDADES DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere la función polinómica  $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ .

a) Calcule los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 1$  y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x = 0$  es la recta  $y = x + 3$ .

b) Para los valores  $a = 2$ ,  $b = 1$  y  $c = 3$ , calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

a)

Por tener un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 1$  es  $f'(1) = 0$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b.$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + b = 0; \quad -2a + b = -3. \quad (1)$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta  $y = x + 3$  es  $m = 1$ .

Lo anterior implica que  $f'(0) = 1$ :

$$m = f'(0) = 3x^2 - 2ax + b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}.$$

Sustituyendo en (1) el valor de  $b$ :

$$-2a + 1 = -3; \quad -2a = -4 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

La función resulta  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + c$ .

El punto de tangencia es  $T(0, 3)$ , por lo cual es  $f(0) = 3$ :

$$f(0) = 3 \Rightarrow \underline{c = 3}.$$

b)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1. \quad f''(x) = 6x - 4.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0; \quad x = x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1-6+9+81}{27} = \frac{85}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Máximo: } P\left(\frac{1}{3}, \frac{85}{27}\right)}.$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 1.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 3 = 3 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } Q(1, 3)}.$$

\*\*\*\*\*

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$ , que depende del parámetro real  $a$ :

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro  $a$ .

b) Resuelva el sistema para el caso de  $a = 1$ .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $a$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 2 - 2 + a = 2a - 4 = 0; \quad a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Para  $a \neq 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para  $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

b)

Para  $a = 1$  el sistema resulta  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ , que es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2 \cdot 1 - 4} = \frac{1 - 2 - 2 + 3}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 - 6 - 2 + 2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+3+2-6-1-2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Solución:  $x = 0, y = 2, z = 1.$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

3º) Considere el plano que pasa por el punto  $A(1, 0, 3)$  y tiene como vectores directores  $\vec{u} = (-1, 3, 2)$  y  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.

b) Calcule la distancia del punto  $P(1, 5, 0)$  al plano.

Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano de ecuación  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  con la expresión  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

-----

a)

Un vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4j - k - 6k - 2i = -2i + 4j - 7k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (2, -4, 7).$$

El vector normal del plano es el vector director de la recta pedida, cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 2 + 7\lambda \end{cases}$ .

b)

$$\text{La ecuación general del plano es: } \pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$4y - (z - 3) - 6(z - 3) - 2(x - 1) = 0; \quad -2(x - 1) + 4y - 7(z - 3) = 0;$$

$$-2x + 2 + 4y - 7z + 21 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 4y + 7z - 23 = 0.$$

Aplicando la fórmula recomendada al plano  $\pi \equiv 2x - 4y + 7z - 23 = 0$  y al punto  $P(1, 5, 0)$ :

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 - 23|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \frac{|2 - 20 - 23|}{\sqrt{4 + 16 + 49}} = \frac{|-41|}{\sqrt{69}} = \frac{41 \cdot \sqrt{69}}{69}.$$

$$\underline{d(P, \pi) = \frac{41 \cdot \sqrt{69}}{69} \text{ unidades.}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $a$  es un parámetro real.

a) ¿Hay algún valor de  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $A$  no tiene inversa para este valor?

b) Calcule la matriz inversa de  $A^2$  para  $a = 0$ .

a)

Una matriz no es invertible (no tiene inversa) cuando su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = 0; \quad a^2 + 1 = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $a^2 + 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ :

La matriz  $A$  es invertible para cualquier valor real de  $a$ .

b)

$$\text{Para } a = 0 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} (A^2|I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + F_3\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

5º) Considere los puntos del espacio tridimensional  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(3, 5, 0)$  y  $C(1, 0, 0)$  y la recta  $r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2}$ .

a) Encuentre el punto de intersección de la recta  $r$  con el plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) Encuentre los puntos de la recta  $r$  para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de  $2 u^3$ .

Nota: El volumen de un tetraedro de vértices P, Q, R y S viene dado por la siguiente expresión:  $V = \frac{1}{6} \cdot |\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})|$ .

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3, 5, 0) - (1, 1, 0)] = (2, 4, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1, 0, 0) - (1, 1, 0)] = (0, -1, 0).$$

La ecuación general del plano  $\pi$  que determinan los puntos A, B y C tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(C; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad -2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv z = 0.$$

El punto de intersección del plano y la recta es el siguiente:

$$r \equiv \left. \begin{matrix} z = 0 \\ x = y - 1 = \frac{z}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow \underline{M(0, 1, 0)}.$$

b)

La expresión de  $r$  por unas ecuaciones paramétricas es  $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ .

Los puntos de  $r$  tiene por expresión  $P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$ .

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) - (1, 1, 0)] = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda).$$

Aplicando la fórmula recomendada:  $V = \frac{1}{6} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})| = 2;$

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}| = 12; \quad \left\| \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} \right\| = |-4\lambda| = 12; \quad |4\lambda| = 12 \Rightarrow |\lambda| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \Rightarrow \underline{P_1(3, 4, 6)}. \quad \lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{P_2(-3, -2, -6)}.$$

\*\*\*\*\*

[www.yoquieroaprobar.es](http://www.yoquieroaprobar.es)

6º) Dadas las funciones  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = 3 - x^2$ .

a) Haga un esbozo de las gráficas de las parábolas  $f(x)$  y  $g(x)$  en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de las abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.

b) Calcule el área de la región del semiplano  $y \geq 0$  comprendido entre las gráficas de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

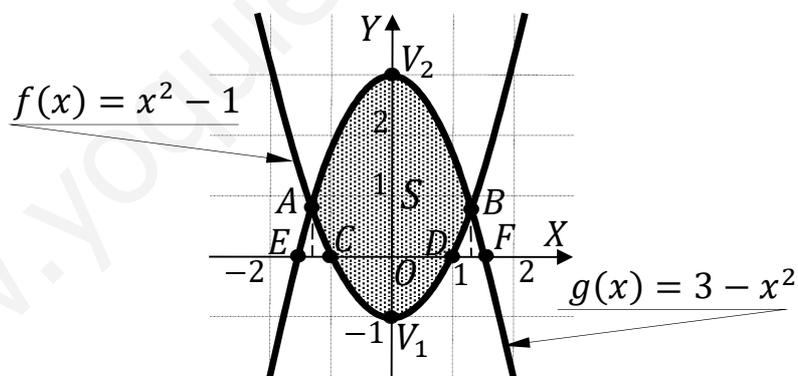
-----

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 1 = 3 - x^2; 2x^2 = 4; x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \rightarrow A(-\sqrt{2}, 1) \\ x_2 = \sqrt{2} \rightarrow B(\sqrt{2}, 1) \end{cases}.$$

La parábola  $f(x) = x^2 - 1$ , que es convexa ( $\cup$ ) por ser positivo el coeficiente de  $x^2$ , tiene su vértice en el punto  $V_1(-1, 0)$  y corta al eje de abscisas en los puntos  $C(-1, 0)$  y  $D(1, 0)$ .

La parábola  $y = 3 - x^2$ , que es cóncava ( $\cap$ ) por ser negativo el coeficiente de  $x^2$ , tiene su vértice en el punto  $V_2(0, 3)$  y corta al eje de abscisas en los puntos  $E(-\sqrt{3}, 0)$  y  $F(\sqrt{3}, 0)$ .



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola de ecuación  $g(x) = 3 - x^2$  iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función  $f(x) = x^2 - 1$  en el intervalo del área a calcular y, además, considerando que las dos funciones son pares y, en consecuencia, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie  $S$  a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} [(3 - x^2) - (x^2 - 1)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2 - x^2 + 1) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) \cdot dx = 2 \cdot \left[ 4x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2 \cdot \left[ 4 \cdot \sqrt{2} - \frac{2 \cdot (\sqrt{2})^3}{3} \right] - 2 \cdot 0 =$$

$$= 8\sqrt{2} - \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16\sqrt{2}}{3} u^2 \cong 7,54 u^2.}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es