

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE CATALUÑA****EXTRAORDINARIA – 2021**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Considere el sistema
$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
, dependiente del parámetro real k .

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k = 1$ y haga una interpretación geométrica.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3k + k - 1 - k^2 - 3 = 0; \quad -k^2 + 4k - 3 = 0;$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0; \quad k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } k = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $k = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

$$\text{Para } k = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 54 + 12 - 6 - 12 - 45 = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $k = 3 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

b)

Para $k = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -4 + \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 1; \quad y = \frac{1}{2}.$$

$$x = 4 - \lambda - y = 4 - \lambda - \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} - \lambda.$$

$$\text{Solución: } x = \frac{7}{2} - \lambda, y = \frac{1}{2}, z = \lambda, \forall \lambda \in R.$$

El sistema resultante significa geométicamente:

Dos planos coincidentes cortados por otro plano oblicuo.

2º) a) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.

b) Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

a)

Para $x = 1$ es $f(1) = 4$, por lo cual el punto de tangencia es $A(1, 4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = -\frac{4}{1^2} \Rightarrow m = -4.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(1, 4)$ con $m = -4$ es:

$$y - 4 = -4(x - 1) = -4x + 4.$$

$$\underline{\text{La recta tangente es } t \equiv 4x + y - 8 = 0.}$$

La pendiente de la recta normal es inversa y de signo contrario de la pendiente de la tangente: $m' = \frac{1}{4}$. La recta normal es la siguiente:

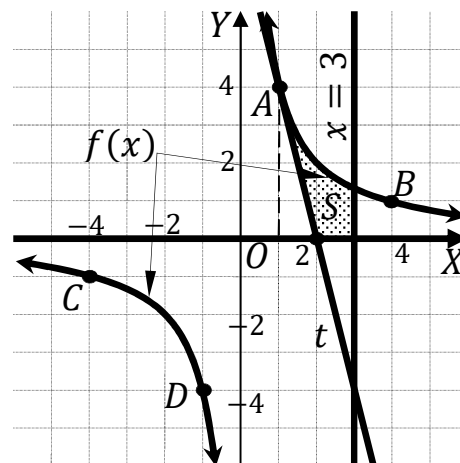
$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1); \quad 4y - 16 = x - 1.$$

$$\underline{\text{La recta normal es } n \equiv x - 4y + 15 = 0.}$$

b)

La función $f(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, simétrica con respecto al origen de coordenadas y que contiene a los puntos $A(1, 4)$ y $B(4, 1)$ y sus puntos simétricos respectivos $C(-4, -1)$ y $D(-1, -4)$.

Nótese que la recta dada, $4x + y = 8$, es la tangente, t , a la función en el punto $A(1, 4)$ obtenida en el apartado anterior.



En el intervalo $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta $t \equiv y = 8 - 4x$, por lo cual, la superficie a

calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [f(x) - t(x)] \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx \Rightarrow S = A + B. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left[\frac{4}{x} - (8 - 4x) \right] \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} + 4x - 8 \right) \cdot dx = \left[4 \cdot Lx + \frac{4x^2}{2} - 8x \right]_1^2 = \\ &= [4 \cdot Lx + 2x^2 - 8x]_1^2 = (4 \cdot L2 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2) - (4 \cdot L1 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1) = \\ &= 4 \cdot L2 + 8 - 16 - 0 - 2 + 8 \Rightarrow A = 4 \cdot L2 - 2. \end{aligned}$$

$$B = \int_2^3 \frac{4}{x} \cdot dx = [4 \cdot Lx]_2^3 \Rightarrow B = 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = 4 \cdot L2 - 2 + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 \Rightarrow \underline{S = (4 \cdot L3 - 2) u^2 \cong 2,39 u^2}.$$

3º) En R^3 se dan los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(1, 1, t)$, en donde t es un valor real.

a) ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?

b) Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5 u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

a)

Los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(1, 1, t)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, 1) - (3, 1, 1)] = (-3, -1, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4, 1, 2) - (3, 1, 1)] = (1, 0, 1).$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1, 1, t) - (3, 1, 1)] = (-2, 0, t - 1).$$

Los puntos A, B, C y D serán coplanarios cuando lo sean los tres vectores que determinan, por lo cual, el rango de los tres vectores tiene que ser 2, es decir: que el determinante de la matriz que forman sea cero.

$$\text{Rang} \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Los puntos A, B, C y D son coplanarios para $t = -1$.

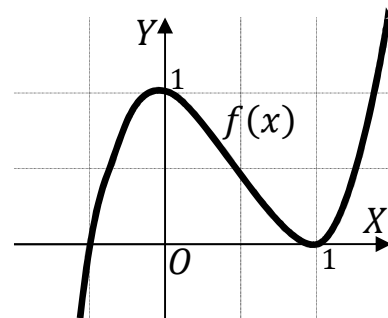
b)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 5 \Rightarrow \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \right| = 30;$$

$$|1 + t| = 30 \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = 30 \rightarrow t_1 = 29 \\ -1 - t = 30 \rightarrow t_2 = -31 \end{cases}$$

El volumen del tetraedro ABCD es de $5 u^3$ para $t = 29$ y para $t = 31$.

4º) a) En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.



b) Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

a)

La derivada de una función representa el valor de la tangente de la función en cada uno de sus puntos. Por tener la función un máximo en $x = 0$ y un mínimo para $x = 1$, la función derivada se anula para estos valores, por lo cual, su expresión es de la forma: $f'(x) = \pm x \cdot (x - 1)$.

Para determinar el signo más o menos se tiene en cuenta, por ejemplo, que la función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$, el signo es positivo y la función derivada tiene por expresión $f'(x) = x \cdot (x - 1)$, que es una parábola convexa (U), por ser positivo el coeficiente de x^2 .

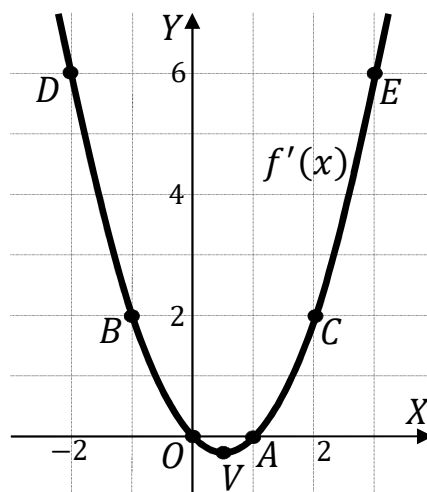
El vértice de la función derivada es el siguiente:

$$f''(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Otros puntos de la función son los siguientes:

$O(0, 0), A(1, 0), B(-1, 2), C(2, 2), D(-2, 6)$ y $E(3, 6)$.



La representación gráfica de la función derivada es la que expresa la figura anterior.

b)

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{3}{4}a + b = -\frac{3}{2}; \quad 3a + 4b = -6. \quad (1)$$

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto.

$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6a \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0; \quad 3a + 2b = 0. \quad (1)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ -3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow \underline{b = -3}.$$

$$3a + 2 \cdot (-3) = 0; \quad a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

www.yoquieroaprobar.es

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a(a+3) \cdot [-(a+1) + 2] + a(a-1)(2a+1) = 0;$$

$$a(a+3)(1-a) - a(1-a)(2a+1) = 0; \quad a(1-a)[(a+3) - (2a+1)] = 0;$$

$$a(1-a)(a+3-2a-1) = 0; \quad a(1-a)(2-a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

La matriz A es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$.

b)

Del apartado anterior se deduce que la matriz A es invertible para $a = 3$, por lo que su comprobación es superflua; no obstante se comprueba a continuación.

$$\text{Para } a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 78 - 72 = 6 \neq 0.$$

Queda comprobado que para $a = 3$ la matriz A es invertible.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B - 3I; \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I); \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I)}. \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 6. \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

También puede obtenerse la inversa de la matriz A por Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_3\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 7F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 28 & -21 & -6 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -\frac{1}{6}F_3\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$B - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -30 & -30 \\ 36 & 36 & 36 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix} = X = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

6º) Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es $\mathbb{R}$, excepto los valores de x que anulan el denominador: $x - 2 = 0$; $x = 2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$.

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0; \quad 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2)^2 - 2x^2(x-3) \cdot [2 \cdot (x-2) \cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2) - 4x^2(x-3)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 24x - 4x^3 + 12x^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3} = \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot (0^2 - 6 \cdot 0 + 12)}{(0-2)^3} = 0 \Rightarrow \text{Ni máximo ni mínimo (para P.I.)}.$$

$$f''(3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot (3^2 - 6 \cdot 3 + 12)}{(3-2)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 3.$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3-2} = \frac{27}{1} = 27 \Rightarrow \underline{\text{Mín.} \Rightarrow A(3, 27)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 6x + 12) = 0; \quad x_1 = 0;$$

$$x^2 - 6x + 12 = 0; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}. \text{ Solución única: } x = 0.$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{(6x^2-24x+24) \cdot (x-2)^3 - 2x(x^2-6x+12) \cdot [3 \cdot (x-2)^2 \cdot 1]}{(x-2)^6} = \\
 &= \frac{(6x^2-24x+24) \cdot (x-2) - 6x(x^2-6x+12)}{(x-2)^4} = \\
 &= \frac{6x^3-12x^2+24x^2-48x+24x-48-6x^3+36x^2-72x}{(x-2)^4} = \frac{48x^2-96x-48}{(x-2)^4} = \frac{48(x^2-2x-1)}{(x-2)^3}.
 \end{aligned}$$

$$f'''(0) = \frac{48(0^2-2 \cdot 0-1)}{(0-2)^3} = \frac{-48}{-8} = 6 \neq 0 \Rightarrow P.I. \text{ para } x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0^3}{0-2} = 0 \Rightarrow \underline{P.I. \rightarrow O(0,0)}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de su primera derivada, se determinan los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$, en los cuales la función es creciente o decreciente. Determinamos cada caso.

$$\text{Para } x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 \cdot (-1-6)}{(-1-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decrec.}$$

$$\text{Para } x = 1 \in (0, 2) \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot (1-6)}{(1-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decrec.}$$

$$\text{Para } x = 2,5 \in (2, 3) \Rightarrow f'(2,5) = \frac{2 \cdot 2,5^2 \cdot (3-3)}{(3-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decrec.}$$

$$\text{Para } x = 5 \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(8) = \frac{2 \cdot 5^2 \cdot (5-3)}{(5-2)^2} > 0 \Rightarrow \text{Crec.}$$

$$\underline{\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)}.$$

$$\underline{\text{Decrecimiento} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3)}.$$

b)

La función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo $[-2, 1]$, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2 > 0. \quad f(1) = \frac{1^3}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 < 0.$$

Lo anterior demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2, 1)$.

Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es monótona decreciente en el intervalo $(-2, 1)$, demuestra que:

La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

Otra forma de demostrar este apartado es la siguiente:

Si tuviera otra raíz $x = \beta \in (-2, 1)$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$; el teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c , $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$ ”.

Del apartado anterior sabemos que $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6 \notin [-2, 1]$, por lo cual, la única raíz de $f'(x) = 0$ es $x = 0$, y esto demuestra que

La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.
