

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****SEPTIEMBRE – 2000**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) Consideramos los puntos A(-5, 2, 4), B(-3, 2, 0) y la recta $s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

a) Calcular la recta r que corta perpendicularmente a s y pasa por B.

b) Consideramos el rectángulo que tiene dos vértices opuestos en A y B, y uno de los lados que pasa por A está contenido en la recta s. Calcular su área.

a)

El haz de planos paralelos perpendiculares a r tienen como vector normal e vector director de s, $\vec{v} = (-3, 1, 2)$, por lo cual tienen por ecuación $\pi_s \equiv 3x - y - 2z + D = 0$.

El plano π del haz que contiene al punto B tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 2z + D = 0 \\ B(-3, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow -9 - 2 - 0 + D = 0 \;; \; \underline{D = 11} \Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x - y - 2z + 11 = 0}$$

El punto P de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

Una expresión de s por ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

$$\pi \equiv 3x - y - 2z + 11 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 3(1 - 3\lambda) - \lambda - 4\lambda + 11 = 0 \;; \; 3 - 14\lambda + 11 = 0 \;; \; \underline{\lambda = 1} \Rightarrow$$

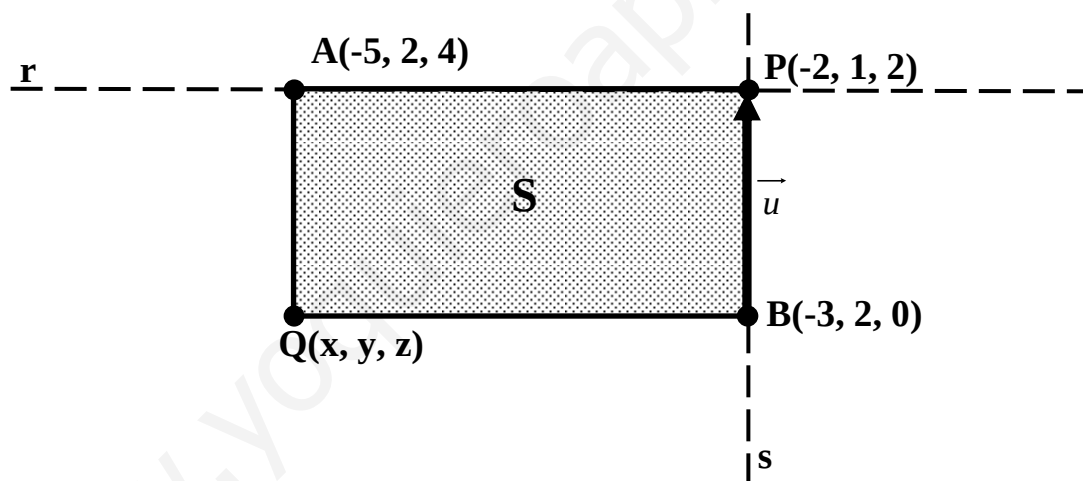
$$\Rightarrow \underline{P(-2, 1, 2)}$$

La recta r pedida es la que pasa por los puntos B(-3, 2, 0) y P(-2, 1, 2).

$$\vec{u} = \overrightarrow{BP} = P - B = (-2, 1, 2) - (-3, 2, 0) = (1, -1, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

b)

La situación gráfica es la que se indica en la figura:



$$\vec{u} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QA} = A - Q = (-5, 2, 4) - (x, y, z) = (1, -1, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-5 - x, 2 - y, 4 - z) = (1, -1, 2) \Rightarrow \begin{cases} -5 - x = 1 \rightarrow x = -6 \\ 2 - y = -1 \rightarrow y = 3 \\ 4 - z = 2 \rightarrow z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{Q(-6, 3, 2)}$$

$$S = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} \cdot \left| \vec{u} \right| = \sqrt{(-2 + 5)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{21} u^2 = S}}$$

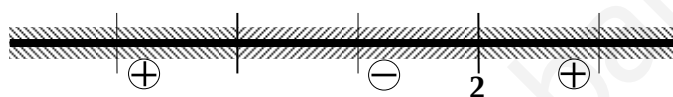
2º) Se considera la función $y = x^2 \cdot e^{-x}$. Estudiar el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas, representando gráficamente la función dada.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

El signo de $f'(x)$ depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo.



$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty) ; ; \quad f'(x) < 0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0, 2)}}$$

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2}{e^x} = \frac{x^2-4x+2}{e^x} = f''(x)$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín(0, 0)}}$$

$$f''(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \cong 0'54 \Rightarrow \underline{\underline{Máx(2, 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x) = 0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 ; ; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{(2x-4) \cdot e^x - (x^2-4x+2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x} = \frac{-x^2+6x-6}{e^x} = f'''(x)$$

$$f'''(2+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P. I. \Rightarrow f(2+\sqrt{2}) = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}} \cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P. I(3'41, 0'38)}}$$

$$f'''(2-\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P. I. \Rightarrow f(2-\sqrt{2}) = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}} \cong 0'24 \Rightarrow \underline{\underline{P. I(0'59, 0'24)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{\text{Aplicando L'Hopital}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{\text{Aplicando de nuevo L'Hopital}\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal : $y = 0$ (Eje X)

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

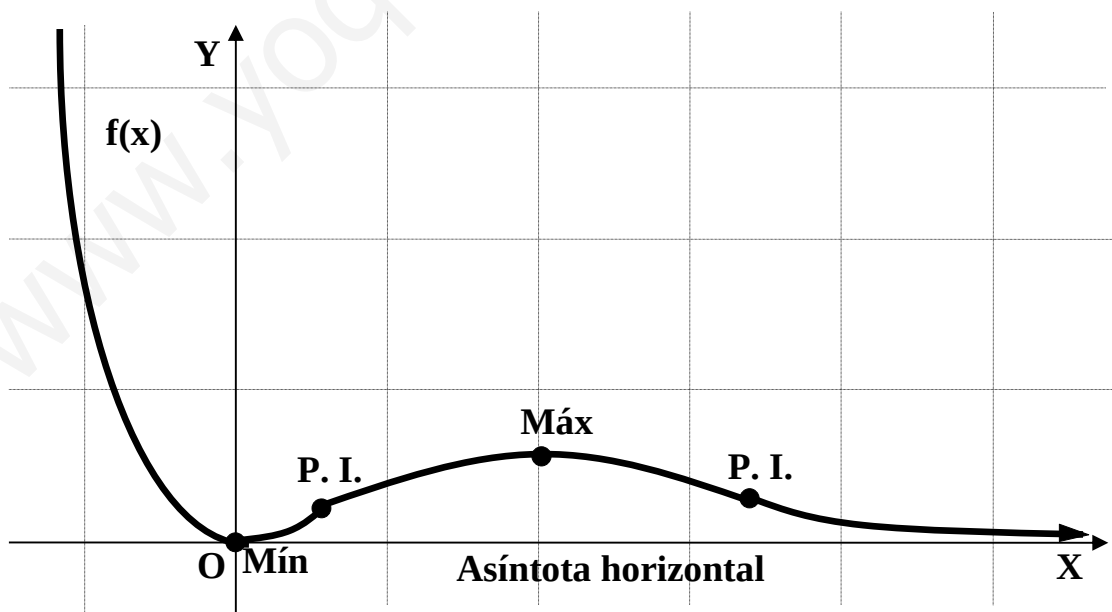
$$\underline{\underline{e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{No tiene}}}$$

Asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \Rightarrow \{\text{L'Hopital}\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 = m$$

No tiene asíntotas verticales.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



CUESTIONES

1ª) Resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = z \\ x + z = y \\ y - z = x \end{array} \right\}.$$

El sistema es equivalente a $\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$. Como puede observarse, se trata de un sistema homogéneo cuyas dos últimas ecuaciones son iguales.

El sistema puede expresarse de la forma $\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$.

Todos los sistemas de ecuaciones homogéneos son compatibles, ya que admiten la solución trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

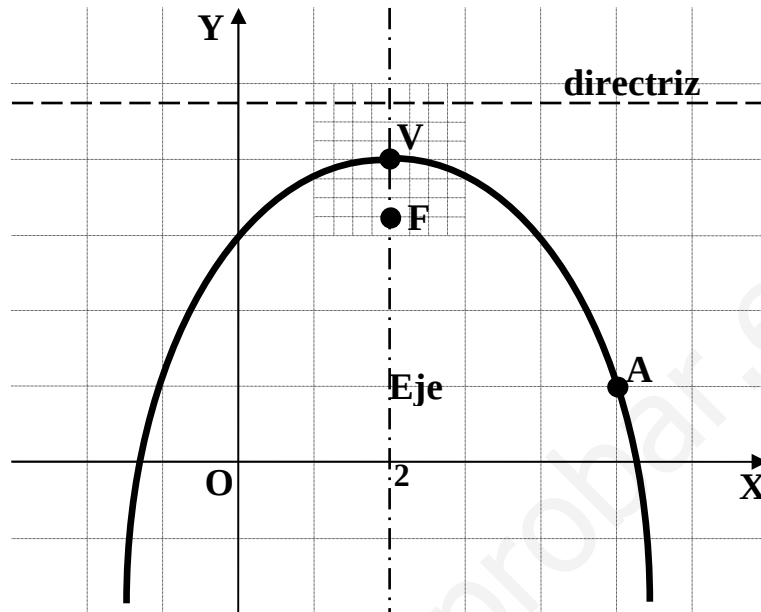
Por tener la matriz de coeficientes rango dos, menor que el número de incógnitas, el sistema tiene, además de la solución trivial, infinitos grupos de soluciones; se obtienen parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo y :

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - z = \lambda \\ x + z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 2\lambda \;; \; \underline{x = \lambda} \;; \; \underline{z = 0}$$

$$\text{Solución : } \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

2ª) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es la recta $x = 2$, la ordenada máxima es 4 y pasa por el punto A(5, 1).

La representación gráfica de la parábola es la siguiente:



Se trata de una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas, cóncava, con el vértice en el punto V(2, 4), cuya ecuación general es:

$(x - \alpha)^2 = -2p(y - \beta)$, siendo α y β las coordenadas del vértice.

Para determinar el valor del parámetro tendremos en cuenta que la parábola pasa por el punto A(5, 1):

$$(5 - 2)^2 = -2p(1 - 4) \;; \; 9 = 6p \;; \; \underline{\underline{p = \frac{3}{2}}}$$

La directriz es una recta paralela al eje de abscisas y, teniendo en cuenta que el parámetro es la distancia del foco a la directriz y que el vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz, su ecuación es:

$$x = 4 + \frac{p}{2} = 4 + \frac{\frac{3}{2}}{2} = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} = x \Rightarrow \underline{\underline{Directriz}}$$

La ordenada del foco es la siguiente.

$$y = 4 - \frac{p}{2} = 4 - \frac{\frac{3}{2}}{2} = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow \underline{\underline{F\left(2, \frac{13}{4}\right)}}$$

Finalmente la ecuación de la parábola es la siguiente:

$$(x-2)^2 = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (y-4) \;; \; x^2 - 4x + 4 = -3y + 12 \;; \; 3y = -x^2 + 4x + 8$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}}}$$

Este ejercicio se puede resolver de la siguiente forma:

Una parábola cuyo eje es paralelo a Y tiene como ecuación: $y = ax^2 + bx + c$.

Sabiendo que pasa por los puntos A(5, 1) y por V(2, 4) y que el punto V es un máximo, sería:

$$\text{Por pasar por } A(5, 1) \Rightarrow y_{(5)} = 1 \Rightarrow 25a + 5b + c = 1 \quad (1)$$

$$\text{Por pasar por } V(2, 4) \Rightarrow y_{(2)} = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4 \quad (2)$$

$$\text{Por máximo en } V(2, 4) \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'_{(2)} = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \;; \; \underline{b = -4a}$$

Sustituyendo en (1) y (2) el valor de a y resolviendo:

$$\left. \begin{array}{l} 25a - 20a + c = 1 \\ 4a - 8a + c = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5a + c = 1 \\ -4a + c = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5a + c = 1 \\ 4a - c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow 9a = -3 \;; \; 3a = -1 \;; \; \underline{a = -\frac{1}{3}}$$

$$\underline{b = -4a = \frac{4}{3} = b} \;; \; 4a + 2b + c = 4 \;; \; -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + c = 4 \;; \; -4 + 8 + 3c = 12 \;; \; \underline{c = \frac{8}{3}}$$

$$\text{Y finalmente: } \underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}}}$$

3ª) Calcular $I = \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx$.

$$I = \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ x \cdot e^{x^2} \cdot dx = dv \rightarrow dv = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot dx \quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{x^2} - \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C = I}}$$

$$(*) \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} e^t + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}}$$

4ª) Utilizando el teorema de los incrementos finitos, demostrar que para cualquiera números reales $a < b$, se verifica que $\sin b - \sin a \leq b - a$.

El teorema de los incrementos finitos, del valor medio o de Lagrange dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando la función $f(x) = \sin(bx) - \sin(ax)$, es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser la suma de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$
