

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****SEPTIEMBRE - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$. Se pide:

- a) Hallar un plano π , perpendicular a ambos y que pase por el punto P(1, 2, -1).
- b) Determinar una recta r paralela a ambos pasando por el punto Q(2, 1, 1).
- c) Calcular el ángulo que forman π_1 y π_2 .

a)

El plano π pedido puede determinarse por tener como vectores directores a dos vectores normales a los planos π_1 y π_2 y que pasa por P.

Los vectores normales a los planos π_1 y π_2 pueden ser:
$$\begin{cases} \vec{n}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{cases} .$$

$$\pi(P; \vec{n}_1, \vec{n}_2) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad x-1+y-2-z-1-z-1+x-1-y+2=0 \quad ; ;$$

$$2x-2z-4=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x-z-2=0}}$$

b)

Los planos π_1 y π_2 determinan la recta $r' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$, que expresada en unas ecuaciones paramétricas es:

$$r' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow z=k \Rightarrow \begin{cases} x+y=-k \\ x-y=1-k \end{cases} \Rightarrow 2x=1-2k \quad ; ; \quad x=\frac{1}{2}-k$$

$$x+y=-k \quad ; ; \quad y=-x-k=-\frac{1}{2}+k-k=-\frac{1}{2}=y \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{2}-k \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v} = (-1, 0, 1)}}$$

La recta r es paralela a r' y pasa por Q(2, 1, 1):

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (-1, 0, 1) \\ Q(2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x=2-k \\ y=1 \\ z=1+k \end{cases}}}$$

c)

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales, por lo cual:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1-1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0'3333 \Rightarrow \alpha = \text{arc. cos } 0'3333 = \underline{\underline{70^\circ 31' 44'' = \alpha}}$$

2º) a) Enunciar el teorema de los incrementos finitos.

b) Una función $f(x)$, derivable en toda la recta, verifica: $f(0) = -2$; $f(2) = 6$.

b₁) Aplicando el teorema anterior, probar que existe un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 4$.

b₂) Si además $f(x)$ tiene derivada continua y $f'(0) = 0$, probar que hay un punto en el intervalo $(0, 2)$ en el que la derivada de f toma el valor 3.

a)

El teorema de los incrementos finitos, del valor medio o de Lagrange se puede enunciar diciendo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b)

b₁)

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(2) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - (-2)}{2} = \frac{8}{2} = 4 = \underline{\underline{f'(c)}}, \text{ c.q.p.}$$

b₂)

$$f'(c) = 3 \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - (-2)}{x} = \frac{f(x) + 2}{x} = 3 \quad ; ; \quad f(x) = 3x - 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = 3}}$$

CUESTIONES

1ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar para qué valores de m la matriz $B + mA$ no tiene inversa.

Para que una matriz no sea inversible, (no tenga inversa) es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$B + m \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|B + m \cdot A| = \begin{vmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{vmatrix} = 2(3+m) - (1+m)(2+2m) = 6 + 2m - 1 - 2m - 2m - 2m^2 =$$

$$= 5 - 2m - 2m^2 = 0 \quad ; \quad 2m^2 + 2m - 4 = 0 \quad ; \quad m^2 + m - 2 = 0 \quad ; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{m_1 = -2} \quad ; \quad \underline{m_2 = 1}.$$

La matriz $B + m \cdot A$ es inversible $\forall m \in \mathbb{R}$, excepto para los valores $m = -2$ y $m = 1$

2ª) Calcular el valor de α para que el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (a, -a, 2)$ y $\vec{v} = (2, a, 1)$ sea proporcional al vector $\vec{w} = (1, 1, 0)$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -a & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -ai + 4j + a^2k + 2ak - 2ai - aj = (-3a)i + (4-a)j + (a^2 + 2a)k =$$

$$= \underline{(-3a, 4-a, a^2 + 2a)} = \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda \vec{w} \Rightarrow (-3a, 4-a, a^2 + 2a) = (\lambda, \lambda, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a \\ \lambda = 4-a \\ 0 = a^2 + 2a \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2a = 0 ; ;$$

$$a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Para } \alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a = 0 \\ \lambda = 4-a = 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{Valor no útil}}$$

$$\text{Para } \alpha = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a = -3 \cdot (-2) = 6 \\ \lambda = 4-a = 4+2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{Valor útil}}$$

El valor de α que satisfaga la condición pedida es $\alpha = -2$.

3ª) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow (\text{Aplicando la Regla de L'Hopital}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+2x^2 = t \\ 4x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t} + C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+2x^2} + C = I$$

www.yoquieroaprobar.es

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) La circunferencia $x^2 + (y + 4)^2 = 25$ corta al eje OX en dos puntos P_1 y P_2 .

a) Hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 .

b) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son P_1 y P_2 y cuyo eje mayor es igual al diámetro de la circunferencia anterior.

a)

Los puntos de corte con el eje OX se obtienen haciendo $y = 0$:

$$x^2 + (0 + 4)^2 = 25 \quad ; ; \quad x^2 + 16 = 25 \quad ; ; \quad x^2 = 25 - 16 = 9 \quad ; ; \quad x = \pm 3 \Rightarrow \underline{P_1(3, 0)} \quad ; ; \quad \underline{P_2(-3, 0)}$$

b)

Del apartado anterior se deduce que $c = 3$.

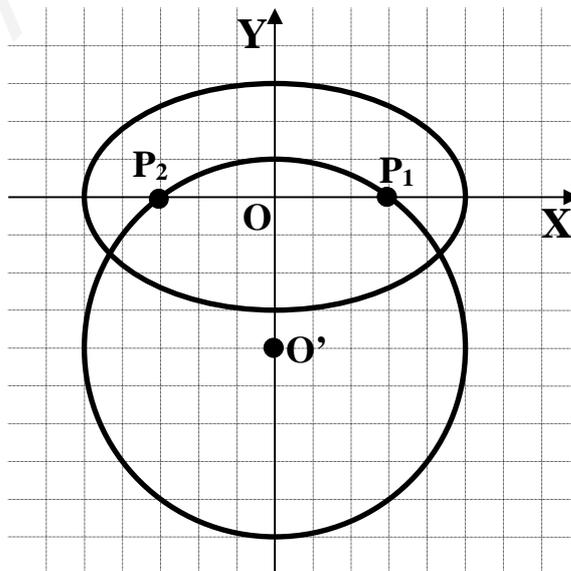
El radio de la circunferencia es 5, que equivale al semieje mayor de la elipse, por lo cual: $a = 5$.

Siendo la relación fundamental de la elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \quad ; ;$

$$b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

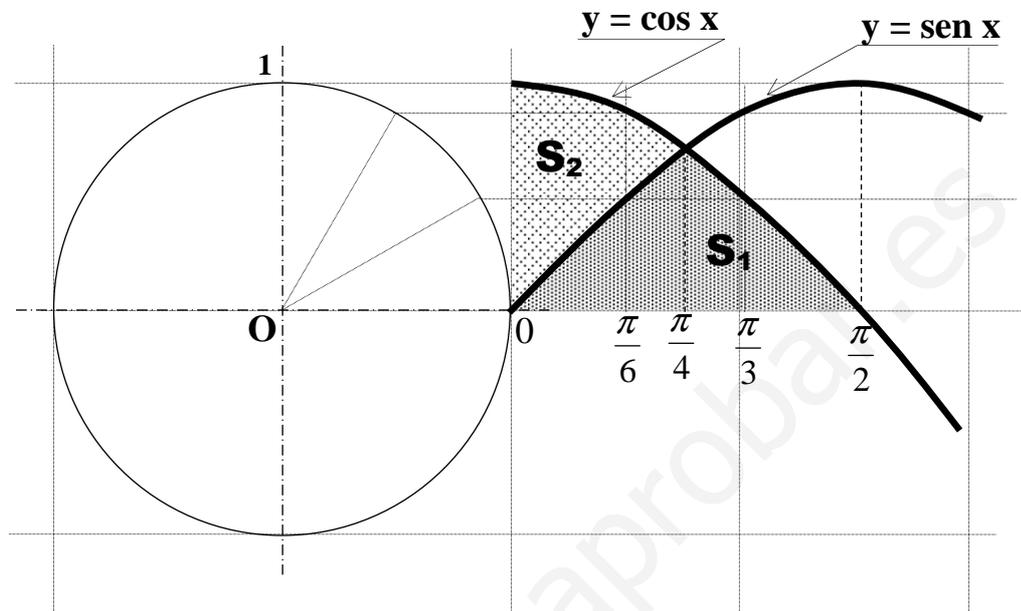
Sabiendo que la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}}$

A continuación ilustramos la situación:



2º) La gráfica de la función $y = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ determina con los dos ejes de coordenadas un recinto que queda dividido en dos partes por la gráfica de la función $y = \sin x$. Determinar el área de cada una de estas partes.

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



El punto de corte de las dos funciones en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es:

$$\sin x = \cos x \quad ; \quad \tan x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = x$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \cdot dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \frac{\pi}{4} + \cos 0\right) + \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\cos 45^\circ + \cos 0^\circ + \sin 90^\circ - \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = 2 - 1'414 = \underline{\underline{0'586 \text{ u}^2}} = S_1$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \cdot dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0) =$$

$$= \sin 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos 0^\circ - \sin 0^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 0 = \sqrt{2} - 1 = 1'414 - 1 = \underline{\underline{0'414 \text{ u}^2}} = S_2$$

CUESTIONES

1ª) Si los determinantes de las matrices cuadradas de orden tres A y 2A son iguales, calcular el determinante de A. ¿Existe la matriz inversa de A?

El determinante de la matriz 2A es 8 veces mayor que el determinante de A. Ello se debe a lo siguiente:

Si se multiplica una matriz por un número resulta otra matriz cuyos elementos quedan multiplicados todos por el número. Por otra parte, si los elementos de una fila o de una columna de un determinante se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por el número. Como quiera que la matriz que nos ocupa es de orden 3, resulta:

$$|2 \cdot A| = 8 \cdot |A| = |A| \Rightarrow \underline{\underline{|A| = 0}}$$

El valor del determinante de A, necesariamente, tiene que ser cero.

No existe la matriz inversa de A por ser condición necesaria para que una matriz tenga inversa que su determinante sea distinto de cero.

2ª) Hallar el plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la

$$\text{recta } s \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} .$$

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$s \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \underline{y = 1 + 2k}$$

$$x - y - z + 2 = 0 \;; \; x = -2 + y + k = -2 + 1 + 2k + k = \underline{-1 + 3k = x} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

El plano π pedido se puede determinar por los vectores directores de las rectas r y s y por un punto cualquiera de la recta r .

Un punto de r es $P(3, 2, 1)$ y un vector director de r es $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

Un vector director de s es $\vec{v} = (3, 2, 1)$.

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$2(x-3) + 9(y-2) + 2(z-1) - 6(z-1) - 6(x-3) - (y-2) = 0 \;;$$

$$-4(x-3) + 8(y-2) - 4(z-1) = 0 \;; \; -4x + 12 + 8y - 16 - 4z + 4 = 0 \;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x - 8y + 4z = 0}}$$

3ª) Dada la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)}{\cos x - \cos(x+1)}$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, demostrar, calculando su derivada, que $f(x)$ es constante.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{[\cos x + \cos(x+1)] \cdot [\cos x - \cos(x+1)] - [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)] \cdot [-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)]}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \\
 &= \frac{[\cos^2 x - \cos^2(x+1)] - [\operatorname{sen}^2(x+1) - \operatorname{sen}^2 x]}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \frac{\cos^2 x - \cos^2(x+1) - \operatorname{sen}^2(x+1) + \operatorname{sen}^2 x}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \\
 &= \frac{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - [\cos^2(x+1) + \operatorname{sen}^2(x+1)]}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \frac{1-1}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \\
 &= \frac{0}{[\cos x - \cos(x+1)]^2} = \underline{\underline{0}} = f'(x)
 \end{aligned}$$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Hallar a, b, c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tome valor 0 para $x = 1$, presente un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \quad ; ; \quad \underline{a + b + c = -1} \quad (1)$$

$$\text{Máx. para } x = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f'(-1) = 0 \rightarrow \underline{3 - 2a + b = 0} \quad (2)$$

$$\text{Mín. para } x = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f'(0) = 0 \rightarrow \underline{b = 0}$$

Sustituyendo el valor de b en las expresiones (1) y (2) y resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + c = -1 \\ 3 - 2a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}} \quad ; ; \quad a + c = -1 \quad ; ; \quad \frac{3}{2} + c = -1 \quad ; ; \quad 3 + 2c = -2 \quad ; ; \quad 2c = -5 \quad ; ; \quad \underline{c = -\frac{5}{2}}$$

La función resultante es la siguiente:

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}}}$$
