

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) a) Hallar el valor del parámetro a para que los planos
$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_3 \equiv 3x - y + az = 4 \end{cases}$$
 se corten

en una recta r .

b) Obtener la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 1, 3)$ y contiene a la recta r del apartado anterior.

a)

Para que los planos se corten en una recta es necesario que el sistema sea compatible determinado con un grado de libertad, o sea, que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales a dos, para lo cual es necesario que los determinantes de ambas matrices sean nulos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = -2a - 1 - 3 + 3 + 2 + a = 1 - a = 0 \quad ;; \quad \underline{a=1}$$

$$\underline{\text{Para } a=1} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 6 - 9 - 4 - 4 = 17 - 17 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $a=1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ$ incóg. \Rightarrow Compatible Indeterminado

Para $a=1$ los planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en una recta r

b)

La recta r que determinan los planos π_1, π_2 y π_3 expresada por dos ecuaciones implícitas puede ser cualquier par de ecuaciones de los planos anteriores, por ejemplo,

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, cuya expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = 1} \quad ;;$$

$$-x + y = -2 + \lambda \quad ;; \quad -1 + y = -2 + \lambda \quad ;; \quad \underline{y = -1 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de r son $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $Q(1, -1, 0)$.

El plano π pedido, por pasar por el punto $P(2, 1, 3)$ y contener a la recta r tiene como vectores directores a $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y a $\vec{w} = \overline{QP} = PQ = (1, 2, 3)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{v}, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 3(x-2) + (y-1) - (z-3) - 2(x-2) = 0 \quad ;;$$

$$(x-2) + (y-1) - (z-3) = 0 \quad ;; \quad x - 2 + y - 1 - z + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, hallar:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.
b) El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a)

Se trata de una función racional cuyo dominio es \mathbb{R} , por no existir valores reales de x que anulen el denominador.

Es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a su derivada:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \quad ; ; \quad (1+x)(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } |x| > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Decrecimiento: } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}}$$

$$\text{Para } |x| < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Crecimiento: } (-1, 1)}}$$

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \underline{\underline{\frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = f''(x)}}$$

$$f''(1) = \frac{2 \cdot (1 - 3)}{(1 + 1)^3} = \frac{-4}{8} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo}}} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(1, \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1) = \frac{-2 \cdot (1 - 3)}{(1 + 1)^3} = \frac{4}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo}}} \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(-1, -\frac{1}{2}\right)}}$$

Los puntos de inflexión son los siguientes:

$$f'''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f''''(x) = \frac{(6x^2 - 6)(x^2 + 1)^3 - (2x^3 - 6x) \cdot 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} = \frac{(6x^2 - 6)(x^2 + 1) - 6x(2x^3 - 6x)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{6x^4 + 6x^2 - 6x^2 - 6 - 12x^4 + 36x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-6(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = f''''(x)$$

$$f''''(0) = \frac{-6}{2} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ ; \ f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{O(0, 0)}}$$

$$f''''(\sqrt{3}) = \frac{-6(9 - 18 + 1)}{16} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ ; \ f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \underline{\underline{M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$f''''(-\sqrt{3}) = \frac{-6(9 - 18 + 1)}{16} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ ; \ f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \underline{\underline{N\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales:

Son los valores finitos de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm \infty$:

$$y = k \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 = y \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\underline{0^+}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\underline{0^-}} \end{cases}$$

La solución de este apartado es lógica si tenemos en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Verticales:

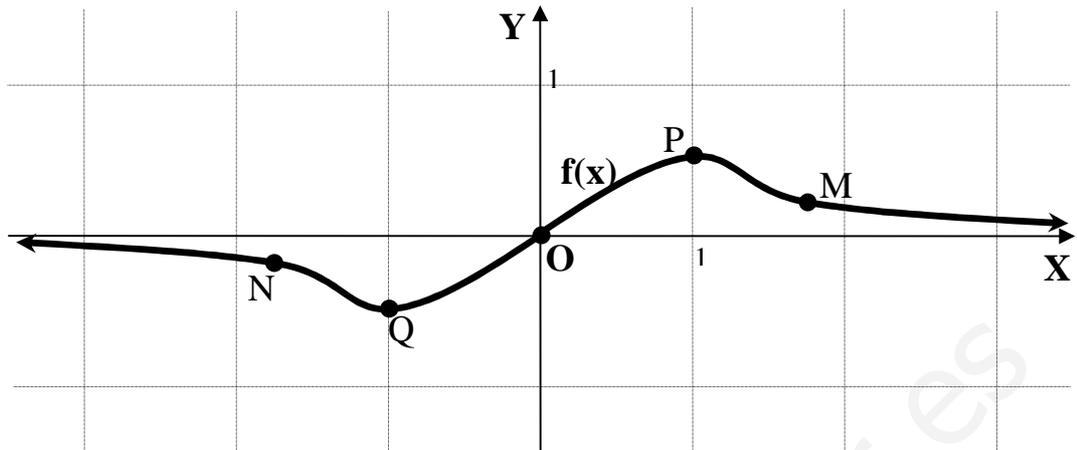
Son los valores finitos que anulan el denominador: no tiene.

Oblicuas:

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

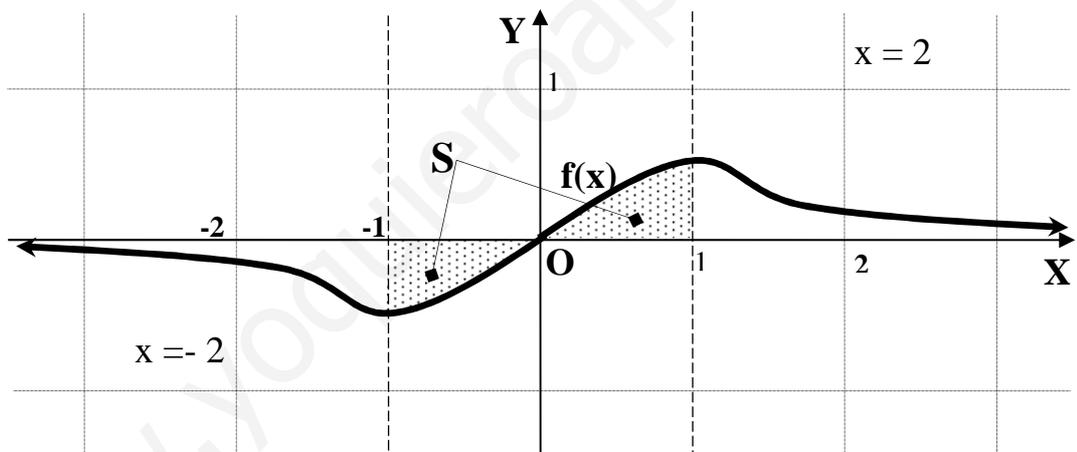
En el caso que nos ocupa: no tiene.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



b)

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la gráfica siguiente, se deduce que el área pedida es:



$$S = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \left\| \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{array} \right. \right\} \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = [Lt]_1^2 = L2 - L1 = \underline{\underline{L2 \cong 0'69 u^2 = S}}$$

CUESTIONES

1ª) Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, según los distintos valores de m .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 2m + 2 + 2 - 2 - 4 - m = m - 2 = 0 \quad ; \quad \underline{m = 2}$$

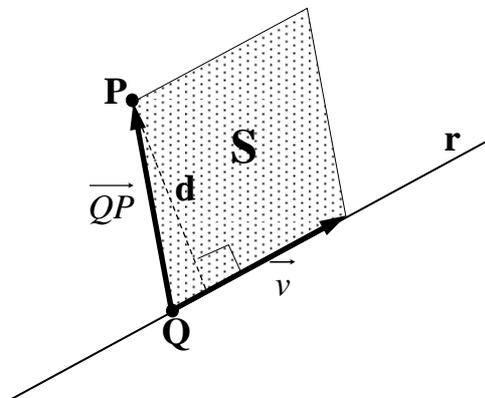
$$\underline{\underline{Para \quad m \neq 2 \quad \Rightarrow \quad Rang \quad A = 3}}$$

Teniendo en cuenta, por ejemplo, que el menor complementario del elemento a_{31} es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, es:

$$\underline{\underline{Para \quad m = 2 \quad \Rightarrow \quad Rang \quad A = 2}}$$

2ª) Hallar la distancia del punto $P(2, 1, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La distancia del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que Q es un punto de r y \vec{v} es el vector director de la recta.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot |\vec{v}|$ y que también puede ser $S = |\vec{v} \wedge \overrightarrow{QP}|$, se deduce que la distancia es: $d(P, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|}$.

Un punto de r es $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$ es un vector director de la recta r .

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (2, 1, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \overrightarrow{QP}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{|3i + 5j - 5k - i|}{3\sqrt{2}} = \frac{|2i + 5j - 5k|}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-5)^2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 + 25 + 25}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 6}}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3} u = d(P, r)}}$$

3ª) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{e^0 - 0 - \cos 0}{\operatorname{sen}^2 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{2 \cdot \cos(2x)} = \frac{e^0 + \cos 0}{2 \cdot \cos 0} = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Demostrar que la ecuación $x^5 + 4x^3 + 3 = 0$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $[-1, 1]$. ¿En qué resultados te basas?

Considerando la función $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3$, que es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , por lo tanto lo será en cualquier intervalo considerado y, naturalmente, en el intervalo dado $[-1, 1]$.

Por ser la función $f(x)$ continua en todos los puntos del intervalo $[-1, 1]$ y derivable en todos los puntos del intervalo $(-1, 1)$ le es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que: “si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

$$f(x) = x^5 + 4x^3 + 3 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = (-1)^5 + 4(-1)^3 + 3 = -1 - 4 + 3 = -2 < 0 \\ f(1) = 1^5 + 4 \cdot 1^3 + 3 = 1 + 4 + 3 = 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\exists c \in \mathbb{R}, c \in [-1, 1] \Rightarrow f(c) = 0}}$$

$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 > 0$, $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ es creciente } \forall x \in \mathbb{R}}}$, lo cual implica que $f(x)$ no puede anularse en ningún otro punto distinto de c , siendo $-1 \leq c \leq 1$, por lo tanto:

La ecuación $x^5 + 4x^3 + 3 = 0$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, c.q.d.

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la siguiente matriz: $C = A + mB$.

a) Hallar para qué valores de m la matriz C tiene rango menor que 3.

b) Para $m = -1$, resolver el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es C .

a)

$$C = A + mB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 & -m \\ m & m & m \\ -2m & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1-m \\ m+2 & m+1 & m \\ 3-2m & 2 & -1 \end{pmatrix} = C$$

$$|C| = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1-m \\ m+2 & m+1 & m \\ 3-2m & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(m^2 - 1) + 2(m+2)(1-m) - (1-m)(m+1)(3-2m) -$$

$$- 2m(m-1) = -m^2 + 1 + 2(m - m^2 + 2 - 2m) + (m^2 - 1)(3 - 2m) - 2m^2 + 2m =$$

$$= -3m^2 + 1 - 2m - 2m^2 + 4 + 3m^2 - 2m^3 - 3 + 2m + 2m = -2m^3 - 2m^2 + 2m + 2 =$$

$$= -2m^2(m+1) + 2(m+1) = (m+1)(2 - 2m^2) = 2(m+1)(1 - m^2) = 2(m+1)(1-m)(1+m) =$$

$$= 2(m+1)^2(1-m) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 1} \ ; \ ; \ \underline{m_2 = -1}$$

$$\text{Para } \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } C < 3$$

b)

Para $m = -1$ la matriz C es $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

El sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es C es $\left. \begin{array}{l} -2x + 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$, equi-

valente al sistema $\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$, equivalente a su vez a $\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$.

Su resolución es evidente haciendo $x = z = \lambda$:

$$5x + 2y - z = 0 \quad ;; \quad 5\lambda + 2y - \lambda = 0 \quad ;; \quad 2y = -4\lambda \quad ;; \quad \underline{y = -2\lambda}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \quad ;; \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

2º) a) Hallar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} L(e + \operatorname{sen} x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

b) Calcular $f'(-\frac{\pi}{2})$.

Para que la función $f(x)$ sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [L(e + \operatorname{sen} x)] = Le = \underline{1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + ax + b) = f(0) = \underline{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{b = 1}$$

La función es continua en $x = 0$ para $b = 5$ y cualquier valor real de a.

b)

Para $x = -\frac{\pi}{2}$ es $f(x) = L(e + \operatorname{sen} x)$ y $f'(x) = \frac{\cos x}{e + \operatorname{sen} x}$.

Teniendo en cuenta que $\begin{cases} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$ sería:

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{e + \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{e - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{e - 1} = 0$$

$$\underline{\underline{f'(-\frac{\pi}{2}) = 0}}$$

CUESTIONES

1ª) Si A es una matriz cuadrada, ¿la matriz $A + A^T$ es igual a su traspuesta? Razonar la respuesta. (A^T es la matriz traspuesta de A).

La respuesta es que en general no.

Como razonamiento de la respuesta puede considerarse, por ejemplo, que si la matriz A tiene todos sus elementos iguales o es simétrica, coincide con su traspuesta y, entonces sería $A + A^T = A + A = 2A$, lo cual obligaría a que se cumpliera que $2A = A^T$, lo cual es en general falso.

Sin embargo, si la matriz A es nula se cumpliría que $A + A^T = A^T$, lo cual también se deduce de: $A + A^T = A^T \Rightarrow A = O$, siendo O la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A .

www.yoquieroaprobar.es

2ª) Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y es perpendicular a la recta $r \equiv x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

Existen diversas formas de resolver este ejercicio; una de ellas puede ser la siguiente:

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$ y un vector director de la recta r es $\vec{v} = (1, -1, 3)$.

La recta s , por ser paralela al plano π es perpendicular al vector normal del plano. Por ser perpendicular a r , sus vectores directores tienen que ser perpendiculares, por lo tanto: el vector director de s tiene que ser perpendicular, a la vez, a los vectores \vec{n} y \vec{v} .

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican, el vector director de la recta s puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores \vec{n} y \vec{v} .

$$\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3i - j - 2k - k - i - 6j = 2i - 7j - 3k = \underline{\underline{(2, -7, -3)}} = \vec{w}$$

Teniendo en cuenta que la recta r pasa por el punto $A(1, 2, -1)$, su ecuación vectorial es:

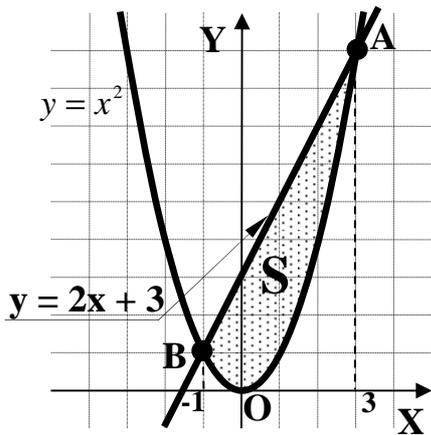
$$\underline{\underline{s \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(2, -7, -3)}}$$

3ª) Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

En primer lugar dibujamos la situación, para lo cual determinamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \ ; \ ; \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ ; \ ; \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: A(3, 9) y B(-1, 1).



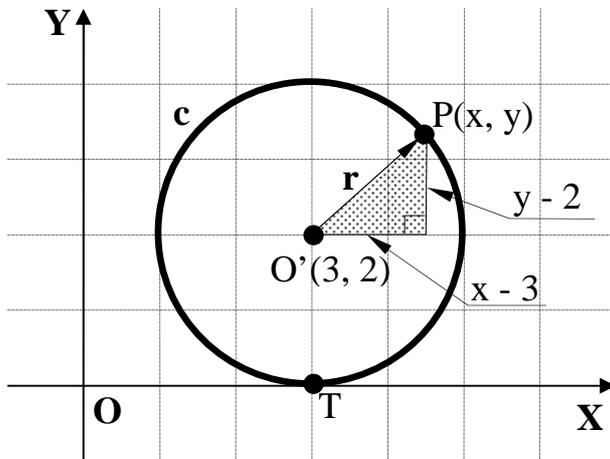
Todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la parábola en el intervalo determinado por los límites de integración que es el siguiente: (-1, 3). El área pedida es:

$$S = \int_{-1}^3 (2x + 3) \cdot dx - \int_{-1}^3 x^2 \cdot dx = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 =$$

$$= \left(9 + 9 - \frac{27}{3} \right) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3} \right) = 18 - 9 + 2 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3} = \frac{33 - 1}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3} u^2 = S}}$$

4ª) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro $O'(3, 2)$ que es tangente al eje de abscisas?



Del triángulo rectángulo de la figura se deduce, aplicando el Teorema de Pitágoras, que:

$$r^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que la circunferencia es tangente en el punto T de coordenadas $T(3, 0)$, el radio de la circunferencia es 2.

Sustituyendo y operando en la expresión (*) resulta:

$$2^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \quad ; ; \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

La expresión analítica de la circunferencia c es la siguiente:

$$\underline{\underline{c \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0}}$$
