

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO – 2004**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) Sea la función $f(x) = 2e^{-2|x|}$.

a) Estudiar su monotonía, extremos relativos y asíntotas.

b) Calcular el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

a)

La función se puede redefinir de la forma: $f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

En primer lugar vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en el punto crítico para $x = 0$ ya que en el resto de su dominio es continua y derivable por tratarse de una función exponencial.

Para que sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{2x}) = \underline{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{-2x}) = \underline{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}$$

La función es continua en $x = 0$.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen las derivadas por la izquierda y por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 4e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ -4e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 4 \cdot 1 = \underline{4} \\ f'(0^+) = -4 \cdot 1 = \underline{-4} \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

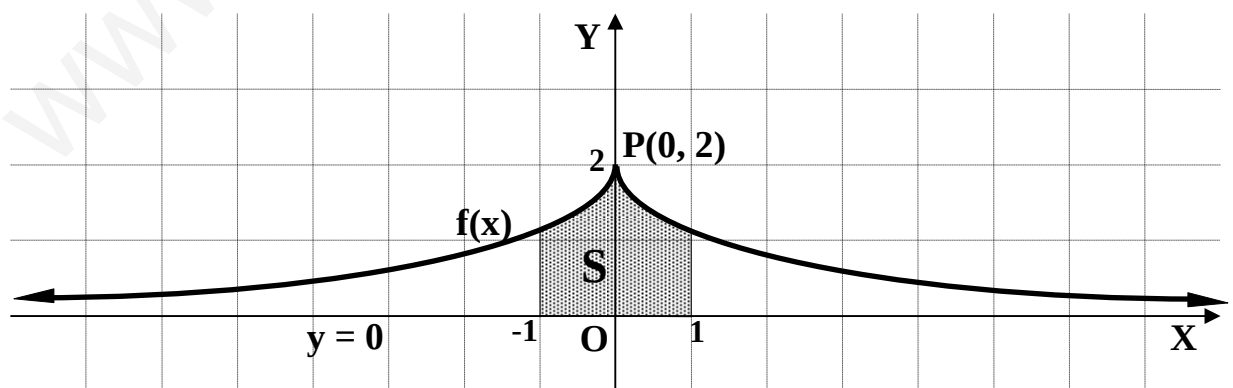
La función no es derivable en $x = 0$.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ es $f'(x) > 0$ y en el intervalo $(0, +\infty)$ es $f'(x) < 0$, lo cual significa que:

$$\underline{(-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es monótona creciente}}$$

$$\underline{(0, +\infty) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es monótona decreciente}}$$

La gráfica aproximada de la función es la siguiente:



Como puede apreciarse, por el apartado de monotonía y estudio de su derivabilidad, existe un máximo absoluto para $x = 0$, a pesar de no ser derivable. Al punto $P(0, 2)$ se le llama “anuloso”.

Por el carácter de función exponencial no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. Las asíntotas horizontales se obtienen haciendo el límite cuando x tiende a más y menos infinito:

$$\left. \begin{aligned} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{2x}) = 2e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \\ y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-2x}) = 2e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$$

b)

Al tratarse de una función simétrica con respecto al eje Y, (la función no varía al cambiar x por $-x$), la superficie pedida es el doble de la limitada por la curva y el eje X entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^1 2e^{-2x} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^1 e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x = t \\ dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=-2 \\ x=0 \rightarrow t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= 4 \cdot \int_0^{-2} e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dt = -2 \cdot \int_0^{-2} e^t \cdot dt = -2 \cdot [e^t]_0^{-2} = -2 \cdot (e^{-2} - e^0) = -2 \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1 - e^2}{e^2}\right) = 2 \cdot \frac{e^2 - 1}{e^2} \cong 2 \cdot \frac{6'39}{7'79} = \underline{\underline{1'73 \text{ u}^2 = S}} \end{aligned}$$

2º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

a) Expresar la recta r por unas ecuaciones paramétricas.

b) Para cada punto P de r, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \underline{y = -1 - \lambda} \ ; \ ; \ \underline{z = 3 + 2\lambda}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}}}$$

b)

Los puntos del eje OZ son de la forma Q(0, 0, z) y, en concreto, las rectas perpendiculares a r que corten a OZ son de la forma Q(0, 0, 3 + 2λ).

Según lo anterior, las rectas s que pasen por P(λ, -1 - λ, 3 + 2λ), que es un punto genérico de la recta r, y son perpendiculares a OZ tiene como vector director a:

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (\lambda, -1 - \lambda, 0).$$

Las rectas pedidas son de la forma:

$$\underline{\underline{s \equiv (x, y, z) = (\lambda, -1 - \lambda, 3 + 2\lambda) + k(\lambda, -1 - \lambda, 0)}}$$

Por ejemplo: Para $\lambda = 0 \Rightarrow \underline{s \equiv (x, y, z) = (0, -1, 3) + k(0, -1, 0)}$

CUESTIONES

1ª) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2 \operatorname{tag} x \cdot \sec^2 x$, hallar la que pasa por el punto $P(\frac{\pi}{4}, 1)$.

$$F(x) = \int 2 \operatorname{tag} x \cdot \sec^2 x \cdot dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) = -2 \int \frac{dt}{t^3} = -2 \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{t^2} + C = F(t) \Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + C}$$

Como $F(x)$ tiene que pasar por el punto $P(\frac{\pi}{4}, 1)$ tiene que ser $F(\frac{\pi}{4}) = 1$:

$$F(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + C = \frac{1}{\cos^2 45^\circ} + C = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C = 2 + C = 1 \Rightarrow \underline{C = -1}$$

La función pedida es:

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tag}^2 x}}$$

2ª) Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$.

Demostrar que las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto es lo mismo que demostrar que la ecuación $e^x = \frac{1}{x}$ tiene al menos una solución, o lo que es lo mismo: que la función $h(x)=e^x - \frac{1}{x}$ tiene al menos una solución.

La función $h(x)=\frac{x \cdot e^x - 1}{x}$ es continua en su dominio, que es: $D(h) \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$.

(Lo anterior se deduce que la función h es suma de dos funciones continuas en sus dominios).

Según el teorema de Bolzano, se trata de encontrar dos valores de x, a y b, tales que $a > 0$ y $b > 0$, que cumplan la condición: $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, o viceversa.

$$\text{Por ejemplo: } \left\{ a = \frac{1}{2}, b = 1 \right\} \Rightarrow \begin{cases} h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} - 2 < 0 \\ h(1) = \frac{1 \cdot e^1 - 1}{1} = e - 1 > 0 \end{cases}$$

Lo anterior nos permite asegurar que en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ las funciones dadas tienen, al menos, un punto de corte.

3ª) Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1 , C_2 y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son $-C_2$, $C_2 + C_3$, $3C_1$. Calcular razonadamente el determinante de A^{-1} en caso de que exista esa matriz.

$$M = (C_1, C_2, C_3) ; ; |M| = 2$$

$$A = (-C_2, C_2 + C_3, 3C_1) \Rightarrow |A| = |-C_2, C_2 + C_3, 3C_1|$$

$$|A| = |-C_2, C_2, 3C_1| + |-C_2, C_3, 3C_1| \quad (1)$$

$$|A| = 0 + |-C_2, C_3, 3C_1| = |-C_2, C_3, 3C_1| \quad (2)$$

$$|A| = 3 \cdot |-C_2, C_3, C_1| \quad (3)$$

$$|A| = 3 \cdot |C_1, C_3, C_2| = -3 \cdot |C_1, C_2, C_3| = 3 \cdot |M| = 3 \cdot 2 = 6 = |A| \quad (4)$$

Nos hemos basado en las siguientes propiedades de los determinantes:

- (1) Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de líneas iguales a las del determinante inicial.
- (2) Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.
- (3) Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de una matriz, su determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.
- (4) Si se intercambian dos líneas paralelas de una matriz, su determinante cambia de signo.

Teniendo en cuenta que:

$$A \cdot A^{-1} = I, \text{ y } \text{que: } |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6} = \underline{\underline{|A^{-1}|}}$$

4ª) Determinar se el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4 = 0$ corta o no al segmento de extremos $A(2, 1, 3)$ y $B(3, 2, 1)$.

La recta que pasa por los puntos A y B tiene como vector director el vector:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 1) - (2, 1, 3) = (1, 1, -2)$$

La recta r que contiene a los puntos A y B es:

$$r(A, \vec{v}) \equiv (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -2)$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

El punto P, intersección de r con el plano π es:

$$P \Rightarrow \{r, \pi\} \Rightarrow 2(2 + \lambda) + 3(1 + \lambda) - 4 = 0 \quad ; ; \quad 4 + 2\lambda + 3 + 3\lambda - 4 = 0 \quad ; ; \quad 5\lambda = 3 \quad ; ; \quad \lambda = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

$$P \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \\ y = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \\ z = 3 - 2\lambda = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)}}$$

Para que el punto P pertenezca al segmento $\overline{AB}$, teniendo en cuenta que los tres puntos están alineados, (pertenecen a r los tres), tiene que cumplirse que $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} \leq 1$:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = \left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right) - (2, 1, 3) = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{54}}{5} = \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+4} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} \leq 1 \Rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{6}}{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{El plano } \pi \text{ corta al segmento } \overline{AB}}}}$$

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1. \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema, según los valores de λ .

b) Resolver el sistema para $\lambda = -3$.

c) Resolverlo para $\lambda = 1$.

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda + \lambda - 1 - \lambda^2 - 1 = 2\lambda - \lambda^2 - 1 = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1}$$

Para $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

Para $m=1$ los rangos de M y M' son 1.

Para $m=1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 1 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

(con dos grados de libertad)

b)

Para $\lambda = -3$ resulta: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-3-3-1+27-1}{1-3-3-1-9-1} = \frac{27-11}{-16} = \frac{16}{-16} = \underline{\underline{-1=x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{1+1+9-1+3+3}{-16} = \frac{17-1}{-16} = \frac{16}{-16} = \underline{\underline{-1=y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{1+9+1+3+3-1}{-16} = \frac{17-1}{-16} = \frac{16}{-16} = \underline{\underline{-1=z}}$$

c)

Para $\lambda = 1$ resulta la ecuación única: $x + y + z = 1$, que se resuelve parametrizando dos de las incógnitas, ya que el sistema primitivo tiene dos grados de libertad (diferencia entre el número de ecuaciones y el rango de la matriz resultante):

$$\left. \begin{array}{l} y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = 1 - \alpha - \beta} \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2º) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determinar a, b y c de modo que f(x) tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x = 1$ sea paralela a la recta r de ecuación $r \equiv y - 4x = 0$, y el área comprendida por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$, sea igual a 1.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}} \Rightarrow \underline{f(x) = x^3 + ax^2 + c} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$r \equiv y - 4x = 0 \;; \; y = 4x \Rightarrow m = 4 \Rightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 = 4 \;; \; 3 + 2a = 4 \;; \; \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

Con los datos obtenidos resulta la función: $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$.

Tenemos que suponer que todas las ordenadas de f(x) en el intervalo (0, 1) son positivas o negativas, cosa que no puede determinarse si no se conoce el valor de c.

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + cx \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + c \right) - 0 = 1 \;;$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + c = 1 \;; \; 3 + 2 + 12c = 12 \;; \; 12c = 7 \;; \; \underline{\underline{c = \frac{7}{12}}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}}}$$

CUESTIONES

1ª) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \infty - \infty \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \Rightarrow (L' Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow (L' Hopital) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{-0}{2 - 0} = 0$$

2ª) Calcular $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - 2 \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2x^2 \sqrt{x}}{5} - \frac{4x \sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C = \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{15} (3x^2 - 10x + 15) + C = I \end{aligned}$$

3ª) Hallar la ecuación del plano π' que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$.

El plano π' se puede determinar por un punto de la recta r , por ejemplo, $O(0, 0, 0)$ y los dos siguientes vectores directores:

1.- $\vec{v}_r$ director de la recta r : $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

2.- $\vec{n}$ normal al plano π : $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

$$\pi'(O; \vec{v}_r, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; -x + z + y - z - x + y = 0 \quad ; -2x + 2y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x - y = 0}}$$

4ª) Dada la matriz $B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que: $X \cdot B + B = B^{-1}$.

Este problema lo vamos a resolver de dos formas diferentes:

$$1ª) B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \text{ Supongamos que } B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Por definición de inversa de una matriz se cumple que:

$$B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}c & \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}d \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c & -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}c = 1 \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2a - c = 3 \\ -a + 2c = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4a - 2c = 6 \\ -a + 2c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a = 6 \;; \; \underline{a=2} \;; \; 4 - c = 3 \;; \; \underline{c=1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}d = 0 \\ -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}d = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2b - d = 0 \\ -b + 2d = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4b - 2d = 0 \\ -b + 2d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3b = 3 \;; \; \underline{b=1} \;; \; 2 - d = 0 \;; \; \underline{d=2}$$

$$\underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Haciendo } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & p \end{pmatrix} \Rightarrow X \cdot B + B = B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}p & -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = 2 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 1 \\ \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3} = 1 \\ -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}p + \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = 2 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y + 2 = 6 \\ -x + 2y - 1 = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 12 \;; \; \underline{x=4} \;; \; \underline{y=4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3} = 1 \\ -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}p + \frac{2}{3} = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2z - p - 1 = 3 \\ -z + 2p + 2 = 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2z - p = 4 \\ -z + 2p = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4z - 2p = 8 \\ -z + 2p = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3z = 12 \;; \; \underline{z=4} \;; \; \underline{p=4}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}}$$

2ª.- Por un procedimiento más práctico y rápido:

$$X \cdot B + B = B^{-1}$$

Restando B a los dos términos: $X \cdot B = B^{-1} - B$.

Multiplicando los dos términos por la derecha por B^{-1} :

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \quad ; ; \quad X \cdot I = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \quad ; ; \quad X = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \quad (*)$$

Sabiendo que $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ y que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Haciendo operaciones:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{4}{3} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} + \frac{4}{3} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}} = X$$
