

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****SEPTIEMBRE - 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) a) Calcúlese los valores de a para los cuales las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y

$s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$ son perpendiculares.

b) Para $a = 1$, calcúlese la recta t que pasa por $P(1, 1, 1)$ y se apoya en r y s .

En primer lugar expresamos la recta s mediante unas ecuaciones paramétricas para determinar un vector director:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x + ay = -1 + 6a\lambda \\ -x + y = 3 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + ay = -1 + 6a\lambda \\ -3x + 3y = 9 - 9\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+3)y = 8 + (6a-9)\lambda \quad ; \quad y = \frac{8 + (6a-9)\lambda}{a+3} = \frac{8}{a+3} + \frac{3(2a-3)}{a+3} \lambda = y$$

$$-x + y = 3 - 3\lambda \quad ; ; \quad x = y - 3 + 3\lambda = \frac{8 + (6a - 9)\lambda}{a + 3} - 3 + 3\lambda =$$

$$= \frac{8 + (6a - 9)\lambda - 3(a + 3) + 3\lambda(a + 3)}{a + 3} = \frac{8 + 6a\lambda - 9\lambda - 3a - 9 + 3a\lambda + 9}{a + 3} = \frac{8 - 3a}{a + 3} + \frac{9(a - 1)}{a + 3}\lambda$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{8 - 3a}{a + 3} + \frac{9(a - 1)}{a + 3}\lambda \\ y = \frac{8}{a + 3} + \frac{3(2a - 3)}{a + 3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_r = \left(\frac{9(a - 1)}{a + 3}, \frac{3(2a - 3)}{a + 3}, 1 \right)}}$$

Un vector director de s es $\underline{\underline{\vec{v}_s = (-1, 1, a)}}$.

Para que las rectas r y s sean perpendiculares es condición necesaria y suficiente que el producto escalar de sus vectores directores sea cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow \left[\frac{9(a - 1)}{a + 3}, \frac{3(2a - 3)}{a + 3}, 1 \right] \cdot (-1, 1, a) = 0 \quad ; ; \quad -\frac{9(a - 1)}{a + 3} + \frac{3(2a - 3)}{a + 3} + a = 0 \quad ; ;$$

$$-9a + 9 + 6a - 9 + a^2 + 3a = 0 \quad ; ; \quad a^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}}$$

b) Para $a = 1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x + y - 6z + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

La recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2 , siendo π_1 el plano que pasa por P y contiene a r y π_2 el plano que pasa por P y contiene a s.

Determinamos un vector director de r:

$$\vec{v}_r = \left(\frac{9(a - 1)}{a + 3}, \frac{3(2a - 3)}{a + 3}, 1 \right). \text{ Para } a = 1 \Rightarrow \vec{v}_r = \left(0, -\frac{3}{4}, 1 \right) \text{ o } \underline{\underline{\vec{v}_r = (0, -3, 4)}}$$

Un punto de r es, p. e., para $a = 1$, $A\left(\frac{5}{4}, 2, 0\right)$.

$$\text{El vector } \vec{AP} = P - A = (1, 1, 1) - \left(\frac{5}{4}, 2, 0\right) = \left(-\frac{1}{4}, -1, 1\right).$$

$$\pi_1(P; \vec{v}_r, \vec{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad \pi_1(P; \vec{v}_r, \vec{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$-12(x - 1) - 4(y - 1) - 3(z - 1) + 16(x - 1) = 0 \quad ; ; \quad 4(x - 1) - 4(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \quad ; ;$$

$$4x - 4 - 4y + 4 - 3z + 3 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi_1 \equiv 4x - 4y - 3z + 3 = 0}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 1)$ y un punto de s es, p. e., B(-1, 3, 1).

El vector $\overrightarrow{BP} = P - B = (1, 1, 1) - (-1, 3, 1) = (2, -2, 0)$.

$$\pi_2(P; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 2(z-1) + 2(y-1) - 2(z-1) + 2(x-1) = 0 \quad ; ;$$

$$2(x-1) + 2(y-1) = 0 \quad ; ; \quad x-1 + y-1 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y - 2 = 0}}$$

$$t \equiv \begin{cases} 4x - 4y - 3z + 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

2º) a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} L(1+x^2) & \text{para } x > 0 \\ x^2 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

b) Calcúlese el área limitada por la gráfica de f(x) y las rectas $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

CUESTIONES

1ª) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de A sabiendo que se cumple que $A^2 - 2A + I = 0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

2ª) Discútase, según el valor de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

3ª) Calcúlese el punto simétrico de P(1, 1, 1) respecto al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

4ª) Calcúlense los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{\cos^2(\lambda x) - 1} = -1$.

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores de k e interprétese geoméricamente el resultado.

b) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

2º) Sea $P(a, \text{sen } a)$ un punto de la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Sea r la recta tangente a dicha gráfica en el punto P y S el área de la región determinada por las rectas r , $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$. Calcúlese el punto P para el cuál el área S es mínima. (Nota: puede asumirse sin demostrar que la recta r se mantiene por encima del eje OX entre 0 y π).

CUESTIONES

1ª) Calcúlese $I = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} \cdot dx$.

2ª) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinense los valores de m para los cuales $M = A + m \cdot I$ no es inversible (donde I denota la matriz identidad)

3ª) Calcúlese $\lim_{x \rightarrow 0} (Lx \cdot \text{sen } x)$.

4ª) Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices son los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$ y $D(3, 1, 2)$.
