

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea a un parámetro real. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1 - a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases}$$
. Se pide:

a) Discutir el sistema en función del valor de a .

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2+a \\ 1-a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (1-a) + 2a^2 - a + 2 + a(1-a) = -1 - 1 + a + 2a^2 - a + 2 + a - a^2 =$$

$$= a + a^2 = a(1+a) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \text{ ; ; } \underline{a_2 = -1}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } \alpha = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2 + F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } \alpha = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 + 1 + 1 + 4 = 7 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \text{ ; ; } \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$$

b)

$$\text{Resolvemos para } a = 0. \text{ El sistema resulta } \begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z = \lambda$, resulta:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ -y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 2 - \lambda} \text{ ; ; } \underline{y = -1 - \lambda} \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c)

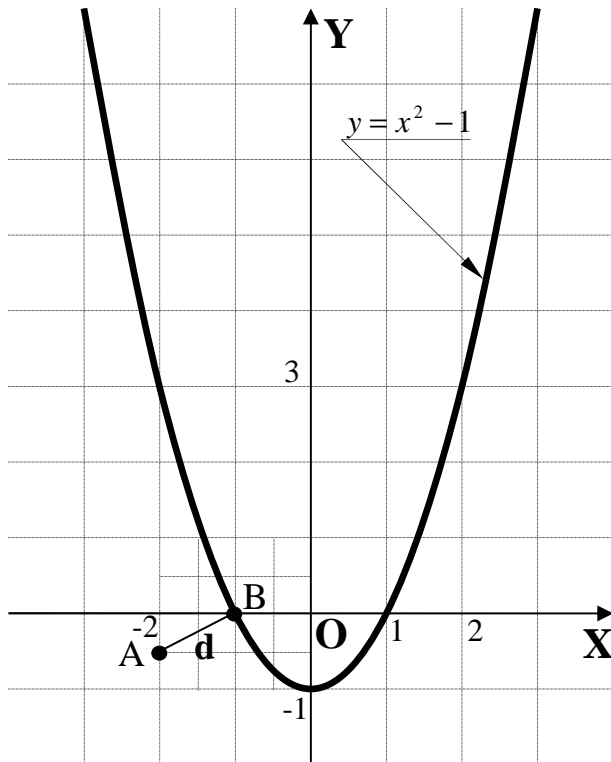
Resolvemos para $a = 1$. El sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible deter-

minado. Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1 \cdot (1+1)} = \frac{-3-1+6+1}{2} = \frac{3}{2} = x \quad ;; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1+6-1}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1-3+1}{2} = -\frac{1}{2} = \underline{\underline{z}}$$

2º) Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.



Sea B un punto de la parábola que cumple la condición de estar lo más próximo posible al punto dado A.

El punto B por pertenecer a la curva $y = x^2 - 1$ es de la forma $B(x, x^2 - 1)$.

La distancia entre los puntos A y B tiene que ser mínima, por lo tanto, su derivada tiene que ser nula.

$$d = \overline{AB} = \sqrt{[x - (-2)]^2 + \left[x^2 - 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{4x + 4 + x^4 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4x^4 + 16x + 17} = d$$

$$d' = \frac{1}{2} \cdot \frac{16x^3 + 16}{2\sqrt{4x^4 + 16x + 17}} = \frac{4x^3 + 4}{\sqrt{4x^4 + 16x + 17}} = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4 = 0 \quad ; \quad x^3 + 1 = 0 \quad ; \quad \underline{x = -1}$$

Solamente un punto cumple la condición.

El punto pedido es $B(-1, 0)$

CUESTIONES

1ª) Sea A una matriz 3 x 3 de columnas C_1 , C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcular el determinante de B en función del de A.

$$A = (C_1 \ C_2 \ C_3) \ ; \ ; \ B = (C_1 + C_2 \ 2C_1 + 3C_3 \ C_2)$$

$$|B| = |C_1 + C_2 \ 2C_1 + 3C_3 \ C_2| = |C_1 \ 2C_1 + 3C_3 \ C_2| + |C_2 \ 2C_1 + 3C_3 \ C_2| =$$

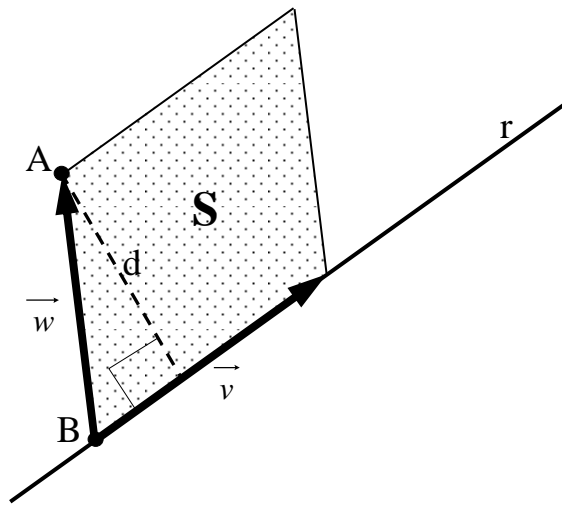
$$= |C_1 \ 2C_1 + 3C_3 \ C_2| + 0 \Rightarrow \{vale \ cero \ por \ tener \ dos \ columnas \ iguales\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| = |C_1 \ 2C_1 \ C_2| + |C_1 \ 3C_3 \ C_2| = 0 + |C_1 \ 3C_3 \ C_2| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Vale cero por tener dos} \\ \text{columnas proporcionales} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| = 3 \cdot |C_1 \ C_3 \ C_2| = -3 \cdot |C_1 \ C_2 \ C_3| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cambia el signo por cambiar} \\ \text{dos columnas entre si} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{|B| = -3 \cdot |A|}$$

2ª) Hallar la distancia entre el punto A(2, 1, 4) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$.



Para una mejor comprensión de la fórmula de la distancia de un punto a una recta se ilustra con el gráfico adjunto.

El vector director de la recta es el siguiente: $\vec{v} = (2, 1, 3)$.

Un punto de r es B(1, -1, 0).

Los puntos B y A determinan el vector $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$.

$$\vec{w} = \overrightarrow{BA} = A - B = (2, 1, 4) - (1, -1, 0) = (1, 2, 4).$$

El valor del área del paralelogramo es $S = |\vec{v}| \cdot d$.

Sabiendo que el módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que determinan, el valor del área también puede expresarse de la forma siguiente: $S = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$.

$$\text{De las dos últimas expresiones se deduce: } |\vec{v}| \cdot d = |\vec{v} \wedge \vec{w}| \Rightarrow d = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}{|\vec{v}|}.$$

Aplicando la fórmula al punto A(2, 1, 4) y a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$:

$$\begin{aligned} d(A, r) &= \frac{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{|4i + 3j + 4k - k - 8i - 8j|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{|-2i - 5j + 3k|}{\sqrt{14}} = \\ &= \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 3^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{4 + 25 + 9}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{38}{14}} = \sqrt{\frac{19}{7}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{136}}{7} \text{ unidades} = d(A, r) \end{aligned}$$

3ª) Estudiar la continuidad en \mathbb{R} de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

La función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier valor real de x , excepto para $x = 0$ que es dudoso y, por ello, se estudia a continuación.

$$\text{Para } x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = \frac{-0}{1} = 0 \\ \underline{f(0)=0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ es continua para } x=0}}$$

4ª) Calcular: $I = \int \frac{dx}{x(x+1)}.$

$$I = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \right) \cdot dx = \int \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} \cdot dx = \int \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \rightarrow B=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} \right) \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx - \int \frac{1}{x+1} \cdot dx = L|x| - L|x+1| + C = \underline{\underline{L \left| \frac{x}{x+1} \right| + C = I}}$$

www.yoquieroaprobar.es

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se consideran las rectas el sistema $r \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$. Se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de r y s.
- b) Determinar la recta t que corta perpendicularmente a r y s.
- c) Hallar la distancia entre r y s.

a)

Las ecuaciones de las rectas r y s, dadas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ y uno de la recta s es $\vec{v}_s = (0, 1, 0)$.

Como quiera que los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s son linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso haremos lo siguiente: determinar un tercer vector, \vec{w} , que tenga como origen un punto de r, por ejemplo A(0, 1, 0) y por extremo un punto de s, por ejemplo, B(0, 0, 2):

$$\vec{w} = \vec{AB} = B - A = (0, 0, 2) - (0, 1, 0) = (0, -1, 2).$$

Si el rango de $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ es 3, r y s se cruzan y si el rango es 2, se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}] = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Las rectas r y s se cruzan.}}}$$

b)

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta p es el siguiente:

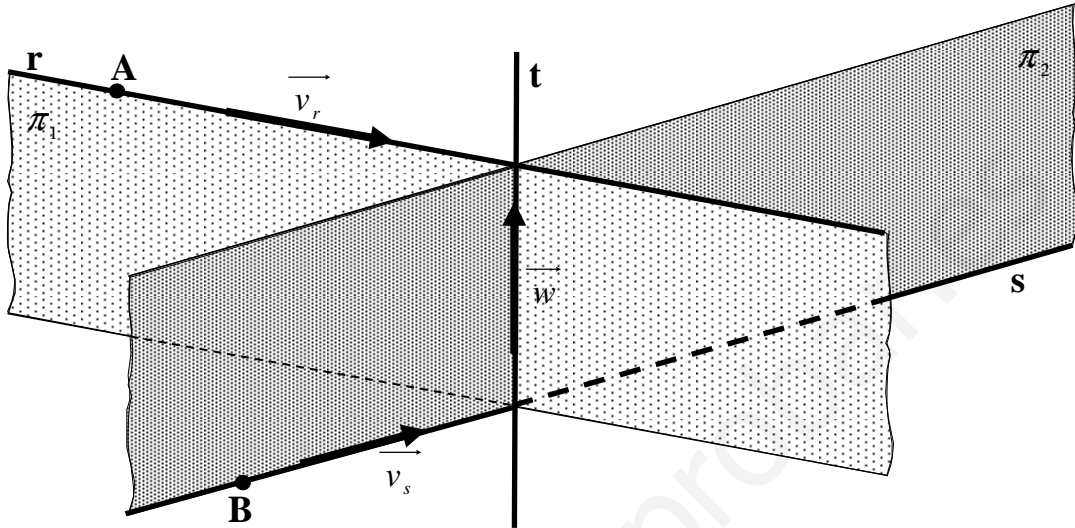
1.- Determinamos los planos π_1 y π_2 , de la forma siguiente:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2x - z - 2(y-1) = 0 \quad ;; \quad 2x - z - 2y + 2 = 0 \quad ;;$$

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x - 2y - z + 2 = 0}$$

$$\pi_2(B; \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2x = 0 \quad ;; \quad \underline{\pi_2 \equiv x = 0}$$

La situación del problema se refleja en el gráfico adjunto.



La recta t pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}}$$

c)

La distancia entre las rectas r y s es la longitud del segmento que determinan los puntos de corte de la recta t con cada una de las rectas r y s:

$$\left. \begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(0, 1, 0)} \quad ;; \quad \left. \begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Q(0, 1, 2)}.$$

$$d(r, s) = \overline{AQ} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0+0+4} = \underline{\underline{2 \text{ unidades} = d(r, s)}}$$

2º) Sea $f(x) = 2 - x + Lx$ con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y la asíntotas de f . Esbozar la gráfica de f .

b) Probar que existe un punto $c \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ tal que $f(c) = 0$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y la asíntotas de f . Esbozar la gráfica de f .

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0, +\infty)$ y sabiendo que una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\text{Creciente: } f'(x) > 0 \Rightarrow (0, 1)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Decreciente: } f'(x) < 0 \Rightarrow (1, +\infty)}}$$

Para que existan máximos o mínimos relativos es necesario que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1-x}{x} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \quad ; \quad 1-x = 0 \quad ; \quad \underline{x=1}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente; para diferenciar el máximo del mínimo relativo se recurre a la segunda derivada: según que sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo o un máximo, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot x - (1-x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-x-1+x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = f''(x) \quad ; \quad \underline{f''(x) < 0, \forall x \in D(f)}.$$

Para $x = 1$ la función tiene un máximo relativo. En este caso, por tratarse de una función continua en su dominio, el máximo es absoluto.

$$f(1) = 2 - 1 + L1 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo absoluto: } P(1, 1)}}$$

Una función es cóncava (\cap) o convexa (\cup) según que la segunda derivada sea negativa o positiva, respectivamente.

Como quiera que $f''(x) < 0, \forall x \in D(f)$, la función es cóncava en su dominio.

Siendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x + Lx) = 2 - 0 - \infty = -\infty$, el eje de ordenadas es asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales por ser $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - x + Lx) = \infty - \infty \Rightarrow$

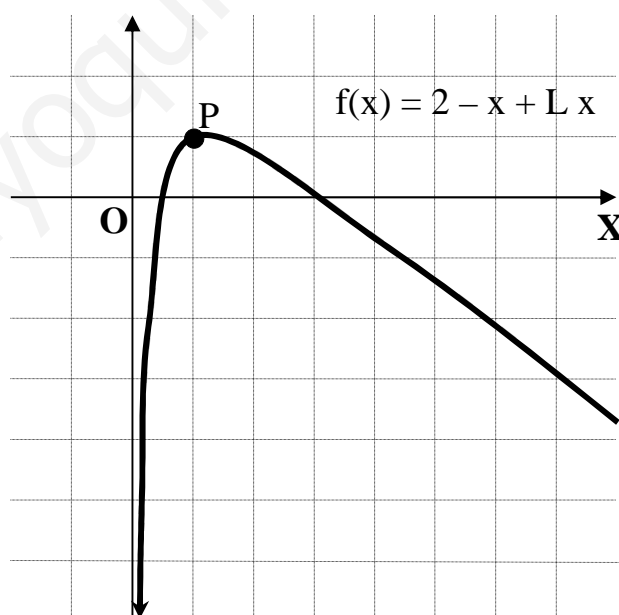
$$\Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Lx}{-1} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Lx}{1} = - \frac{\infty}{\infty} = - \frac{\infty}{0} = -\infty.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x + Lx}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{Lx}{x} \right) = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Nota: Téngase en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Lx}{x} = 1$.

Con los datos anteriores se puede esbozar la gráfica de f que es la siguiente:



b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, por tanto lo es en todos los puntos de cualquier intervalo considerado que pertenezca a dicho dominio, y por lo tanto al intervalo considerado $c \in \left[\frac{1}{e^2}, 1 \right]$.

El Teorema de Bolzano, que dice que: “si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$ ”:

$$f(x) = 2 - x + Lx \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{e^2}) = 2 - \frac{1}{e^2} + L\frac{1}{e^2} = 2 - \frac{1}{e^2} + L1 - 2Le = 2 - \frac{1}{e^2} + 0 - 2 = -\frac{1}{e^2} < 0 \\ f(1) = 2 - 1 + L1 = 1 + 0 = 1 > 0 \end{cases}$$

En efecto, $\exists c \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ tal que $f(c)=0$, c. q. d.

CUESTIONES

1ª) Sea a un número real. Discutir el sistema $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x + (a-1)y = 0 \end{cases}$, según los valores de a .

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 = a^2 - a - 2 = 0.$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1 = 2} \quad ; \quad \underline{a_2 = -1}.$$

Para $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

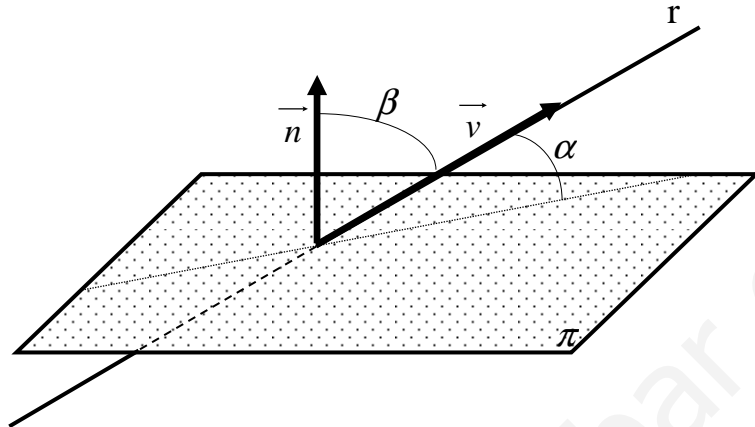
Solución trivial: $x = y = 0$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, equivalente a $2x + y = 0$, cuyas soluciones son: $\underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R} .}}$

Para $a = -1$ el sistema resulta $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$, equivalente a $x - y = 0$, cuyas soluciones son: $\underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R} .}}$

2ª) Hallar el seno del ángulo formado por la recta $r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y = z$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector \vec{v} director de r y un vector \vec{n} , normal al plano π .

Para determinar un vector director de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \Rightarrow \underline{z = x = 3 - 2\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (-2, 1, -2)$ y un vector normal de $\pi \equiv x + y - z = 0$ es $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \quad (*)$$

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(-2, 1, -2) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 + 1 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc. sen} \frac{\sqrt{3}}{9} = \underline{\underline{11^\circ 5' 45'' = \alpha}}$$

3ª) Calcular los valores del número real a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8 \quad ;; \quad \frac{e^0 - 1 - 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a e^{ax} - a}{2x} =$$

$$= \frac{a e^0 - a}{0} = \frac{a - a}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{ax}}{2} = \frac{a^2 \cdot 1}{2} = \frac{a^2}{2} = 8 \quad ;; \quad a^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \pm 4}}$$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} .$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 \left[1 - \left(\frac{x-1}{3} \right)^2 \right]}} = \int \frac{dx}{3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3} \right)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3} \right)^2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{3} = t \\ dx = 3 dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int \frac{3 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen } t + C = \underline{\underline{\text{arc sen } \frac{x-1}{3} + C = I}}$$

www.yoquieroaprobar.es