PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II | Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Halla su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) Calcular el valor de $I=\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

----

a)

Al no anularse el denominador para ningún valor real de x, el domino de definición de la curva es R.

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\underline{\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}$$

$$\underline{\underline{y'>0,\ \forall x\in R\ \Rightarrow\ La\ \ curva\ \ es\ \ monótona\ \ creciente}}$$

Al ser monótona creciente en su dominio <u>no tiene máximos ni mínimos relativos.</u>

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{\left(4x^3+6x\right)\cdot\left(x^2+1\right)^2-x^2\left(x^2+3\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(4x^3+6x\right)\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\left(x^2+3\right)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\underline{\frac{-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}}$$

Una función es cóncava $(\cap)$ cuando $f''(x)>0$ y convexa $(\cup)$ cuando $f''(x)<0$.

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0\ ;;\ -2x\left(x^2-3\right)=0\ ;;\ \underline{x_1=0}\ ;;\ x^2-3=0\ ;;\ \underline{x_2=-\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_3=\sqrt{3}}.$$

La función f(x) es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x)=-f(x)$. Por ser $f''(x)=0$, los intervalos alternativos de concavidad y convexidad son : $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$, $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)$.

Considerando un valor del intervalo $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$, por ejemplo x = 1:

$$f''(1)=\frac{-2\cdot\left(1^2-3\right)}{\left(1^2+1\right)^3}=\frac{-2\cdot(-2)}{2^3}=\frac{4}{8}>0\ \Rightarrow\ \underline{Convexidad}.$$

$$\underline{\underline{Concavidad\ \ (\cap)\ \Rightarrow\ f''(x)<0\ \Rightarrow\ \left(-\sqrt{3},\ 0\right)\cup\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{Convexidad\ \ (\cup)\ \Rightarrow\ f''(x)>0\ \Rightarrow\ \left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\ \sqrt{3}\right)}}$$

Una función tiene puntos de inflexión para los valores de x que anulen la segunda derivada; esta condición, que es necesaria, no es suficiente, por lo que es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0} \;\;;;\;\; \underline{x_2=-\sqrt{3}} \;\;;;\;\; \underline{x_3=\sqrt{3}}$$

$$f'''(x)=\frac{(-6x^2+6)\cdot(x^2+1)^3-2x(x^2-3)\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6}=$$

$$=\frac{(-6x^2+6)\cdot(x^2+1)-2x(x^2-3)\cdot 3\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-6x^4-6x^2+6x^2+6-12x^4+36x^3}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{-18x^4+36x^3+6}{(x^2+1)^4}=\underline{\frac{-6(3x^4-6x^3-1)}{(x^2+1)^4}}$$

$$f'''(0)\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.I. \;\Rightarrow\; O(0,\;0)}} \;\;;;\;\; f'''(\sqrt{3})\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.I. \;\Rightarrow\; A\left(\sqrt{3},\; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}.$$

Por simetría: $\underline{\underline{P.I. \;\Rightarrow\; B\left(-\sqrt{3},\; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\infty \;\Rightarrow\; \underline{No\;\; tiene.}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+1=0 \;\;;;\;\; x\notin R \;\Rightarrow\; \underline{No\;\; tiene.}$$

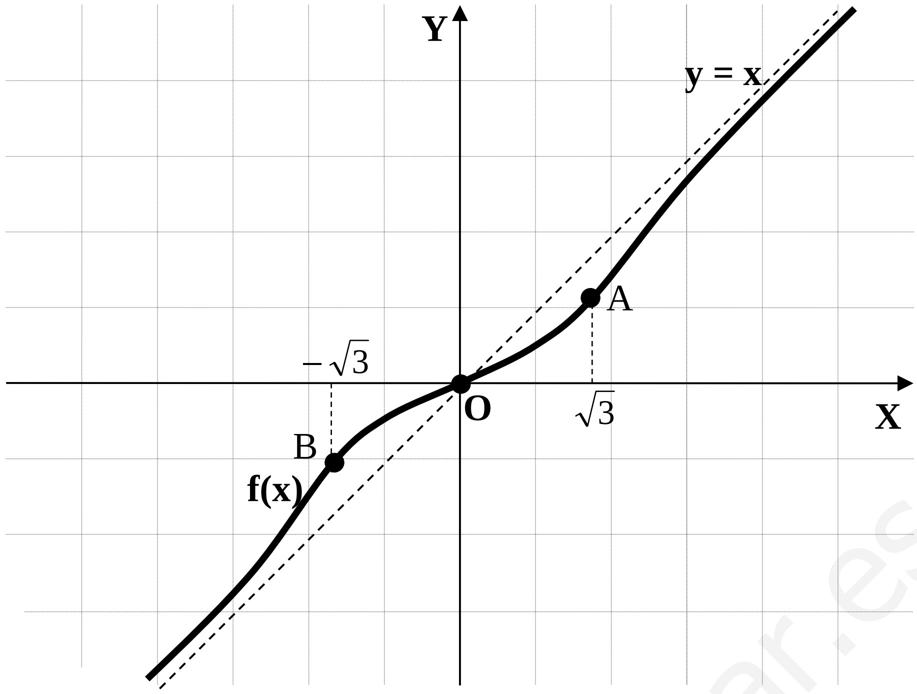
Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\underline{1=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\underline{0=n}$$

<u>Asíntota oblicua: y = x</u>

La representación aproximada de la función es la siguiente:



b)

Para calcular $I=\int_0^1 f(x)\cdot dx$ calculamos, en primer lugar, la integral indefinida:

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & & x^2+1 \\ \hline -x^3 & -x & x \\ \hline 0 & -x & \end{array}$$

$$A=\int \frac{x^3}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(x+\frac{-x}{x^2+1}\right)\cdot dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{-x}{x^2+1}\cdot dx=\underline{\frac{x^2}{2}+A_1=A}$$

$$A_1=\int \frac{-x}{x^2+1}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x\,dx=dt \end{array}\;\middle|\; -x\,dx=-\frac{1}{2}dt\right\} \;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}L\,t=\underline{-\frac{1}{2}L\left(x^2+1\right)=A_1}$$

Sustituyendo en A el valor obtenido de A_1: $\underline{A=\frac{x^2}{2}-L\left(x^2+1\right)}$

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\cdot dx=\left[\frac{x^2}{2}-L\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\left[\frac{1^2}{2}-L\left(1^2+1\right)\right]-\left[\frac{0^2}{2}-L\left(0^2+1\right)\right]=\frac{1}{2}-L\,2-0+L\,1=$$

$$=\frac{1}{2}-L\,2+0=\frac{1}{2}-L\,2=\underline{\underline{\frac{1-2\,L\,2}{2}}}=I$$

****

2º) Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = z$ y el punto P(1, 8, 2).

a) Hállese el punto A de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP}$ es perpendicular a r.

b) Determínese el plano π que es paralelo a r, pasa por B(5, 1, 0) y por el simétrico del punto P respecto de r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (3,\ 2,\ 1)$.

Los puntos genéricos de r son de la forma $A'(1 + 3\lambda,\ 2 + 2\lambda,\ \lambda)$.

El vector genérico de origen cualquier punto de r y extremo P(1, 8, 2) es:

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{A'P} = P - A' = (1-1-3\lambda,\ 8-2-2\lambda,\ 2-\lambda) = (-3\lambda,\ 6-2\lambda,\ 2-\lambda).$$

Para que $\overrightarrow{v'}$ y $\overrightarrow{u} = (3,\ 2,\ 1)$ sean perpendiculares su producto tiene que ser 0:

$$\overrightarrow{v'} \cdot \overrightarrow{u} = (-3\lambda,\ 6-2\lambda,\ 2-\lambda) \cdot (3,\ 2,\ 1) = 0 \Rightarrow -9\lambda + 12 - 4\lambda + 2 - \lambda = 0 \ ;;\ 14 = 14\lambda \ ;;\ \underline{\lambda = 1}.$$

El punto de la recta es A(4, 4, 1) y el vector pedido es:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 8,\ 2) - (4,\ 4,\ 1) = (-3,\ 4,\ 1)}}$$

b)

El punto P', simétrico de P(1, 8, 2) con respecto a la recta r es el siguiente:

El plano π', perpendicular a r por P, es el que tiene como vector normal al vector director de la recta r, $\overrightarrow{u} = (3,\ 2,\ 1)$, y contiene al punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,\ 8,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 2 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -21} \ \Rightarrow \ \underline{\pi' \equiv 3x + 2y + z - 21 = 0}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + 2y + z - 21 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + \lambda - 21 = 0 \ ;;\ 3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + \lambda - 21 = 0 \ ;;$$

$14\lambda = 14$;; $\underline{\lambda = 1}$ $\Rightarrow$ $\underline{N(4,\ 4,\ 1)}$.

Para que P’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N$;; $(4,\ 4,\ 1) - (1,\ 8,\ 2) = (x,\ y,\ z) - (4,\ 4,\ 1)$;;

$$(3,\ -4,\ -1) = (x-4,\ y-4,\ z-1) \Rightarrow \left.\begin{cases} x-4=3 \rightarrow \underline{x=7} \\ y-4=-4 \rightarrow \underline{y=0} \\ z-1=-1 \rightarrow \underline{z=0} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P'(7,\ 0,\ 0)}$$

El plano π pedido contiene al punto B(5, 1, 0) y tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\overrightarrow{u} = (3,\ 2,\ 1)$, por ser paralelo a ella y, por contener a los puntos B y P’, al vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BP'} = P' - B = (7,\ 0,\ 0) - (5,\ 1,\ 0) = (2,\ -1,\ 0)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(y-1) - 3z - 4z + (x-5) = 0 \ ;;\ x - 5 + 2y - 2 - 7z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + 2y - 7z - 7 = 0}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcular el límite $\lim_{x \to 0} \frac{L\,2^{sen\ x}}{e^x - 1}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{L\,2^{sen\ x}}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x \cdot L\,2}{e^x - 1} = \frac{0 \cdot L\,2}{e^0 - 1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{L\ 2 \cdot \cos x}{e^x} = \frac{L\ 2 \cdot 1}{e^0} = \frac{L\,2}{1} = \underline{\underline{L\,2}}$$

****

2ª) Hallar los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3$ es paralela a la recta de ecuación y = 3x + 2.

La pendiente de la recta es m = 3.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=3x^2=m=3 \Rightarrow 3x^2=3\ ;;\ x^2=1\ ;;\ \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=-1}.$$

Los puntos de tangencia son: $f(1)=1 \Rightarrow \underline{\underline{A(1,\ 1)}}$ y $f(-1)=-1 \Rightarrow \underline{\underline{B(-1,\ -1)}}$.

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la expresión $y-y_0=m(x-x_0)$, aplicada a los puntos A y B con m = 3:

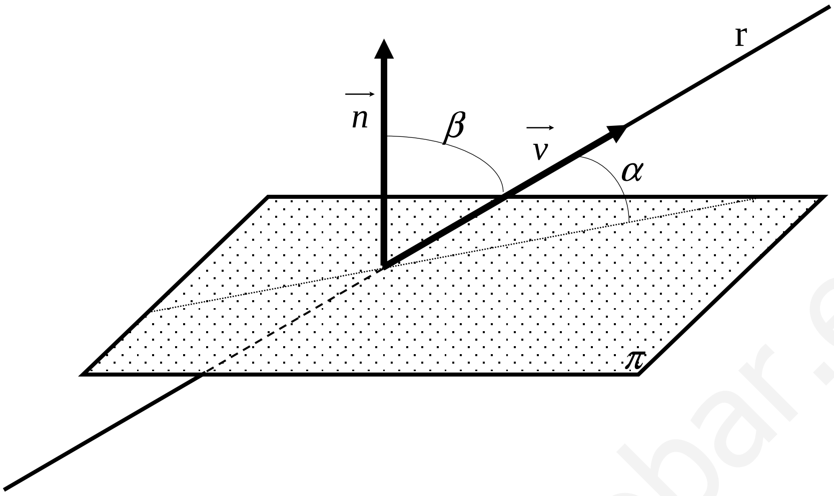
$$y-1=3\cdot(x-1)=3x-3\ ;;\ y=3x-2 \Rightarrow \underline{\underline{Recta\ tangente:\ t_1 \equiv 3x-y-2=0}}.$$

$$y+1=3\cdot(x+1)=3x+3\ ;;\ y=3x+2 \Rightarrow \underline{\underline{Recta\ tangente:\ t_2 \equiv 3x-y+2=0}}.$$

****

3ª) Determinar el ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 4$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y un vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} \qquad (*)$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ 1)$ y un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)$.

$$\cos \beta = sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(2,\ 3,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ -1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2+3-1}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{42}} = 0'6172 \quad \Rightarrow \quad \alpha = arc.\ sen\ 0'6172 = \underline{\underline{38^{\circ}\ \ 06'\ \ 47'' = \alpha}}$$

****

4ª) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} -x & -1 & 2x \\ 2x & -x & -1-x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$\begin{vmatrix} x & 1 & -2x \\ -2x & x & 1+x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$;; $8x^3 - (1+x) - 2x^2 - 2x^2(1+x) = 0$;; $8x^3 - 1 - x - 2x^2 - 2x^2 - 2x^3 = 0$;;

$6x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$ Resolviendo por Ruffini encontramos la única raíz real de la ecuación:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & & 6 & 2 & 1 \\ \hline & 6 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0$;; $x(6x^2 + 2x + 1) = 0$;; $\underline{x_1 = 0}$;; $6x^2 + 2x + 1 = 0$;; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2 \cdot 6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x \notin R}$

<u>Solución: x = 1.</u>

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro real α, el sistema $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-\alpha y+z=\alpha \\ 3x+2z=5 \end{cases}$.

b) Interpretar la discusión realizada en a) en términos de la posición relativa de los planos dados por cada una de las tres ecuaciones del sistema.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -\alpha & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4\alpha+3+3\alpha-2=1-\alpha=0 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; \alpha\neq 1 \;\Rightarrow\; Rango\; M=Rango\; M'=3=n^{o}\; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\; determinado}}$$

$$Para\;\; \alpha=1 \;\Rightarrow\; M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2}.$$

Téngase en cuenta que en M’ se cumple que $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$.

$$\underline{\underline{Para\;\; \alpha=1 \;\Rightarrow\; Rango\; M=Rango\; M'=2<n^{o}\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\; Indeterminado}}$$

b)

Para α ≠ 1 el sistema es compatible determinado, es decir, que la solución es única, lo que indica que los tres planos que representan las tres ecuaciones del sistema se cortan en un punto.

<u>Los tres planos son secantes entre si y se cortan en un punto.</u>

Para α = 1 el sistema es compatible indeterminado y, como los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen rango 2, indica que se cortan en una recta. Como los planos no son coincidentes ni paralelos,

<u>Los tres planos se cortan en una recta.</u>

****

2º) Sea la función $f(x)=sen\ x+\cos\ x$, definida en el intervalo $[0,\ 2\pi]$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos. Esbozar su gráfica.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, e $y=2$.

----

a)

La función f(x) es continua en su dominio por ser la suma de dos funciones continuas en R, que son $sen\ x$ y $\cos\ x$.

$$f'(x)=\cos\ x-sen\ x=0\ ;;\ sen\ x=\cos\ x\ \Rightarrow\ \underline{x_1=\frac{\pi}{4}}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{5\pi}{4}}.$$

Las raíces que anulan la primera derivada dividen el dominio en los intervalos $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4},\ 2\pi\right)$, que son alternativamente, crecientes o decrecientes. Para determinar el crecimiento o decrecimiento consideramos un valor sencillo, por ejemplo, x = π correspondiente al segundo intervalo:

$$f'(\pi)=\cos\ \pi-sen\ \pi=-1-0=-1<0\ \Rightarrow\ \underline{Decreciente}.$$

De lo anterior se deducen los siguientes periodos de crecimiento y decrecimiento:

$$\underline{\underline{f'(x)<0\ \Rightarrow\ Decreciente\ \ x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)>0\ \Rightarrow\ Creciente\ \ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\ 2\pi\right)}}$$

$$f''(\pi)=-sen\ x-\cos\ x\ \Rightarrow\ \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-sen\ \frac{\pi}{4}-\cos\ \frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo} \\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-sen\ \frac{5\pi}{4}-\cos\ \frac{5\pi}{4}=-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\ \frac{\pi}{4}+\cos\ \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo:\ P\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)}}.$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=sen\ \frac{5\pi}{4}+\cos\ \frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ Q\left(\frac{5\pi}{4},\ -\sqrt{2}\right)}}.$$

Los puntos de corte de la función con los ejes en su dominio, son los siguientes:

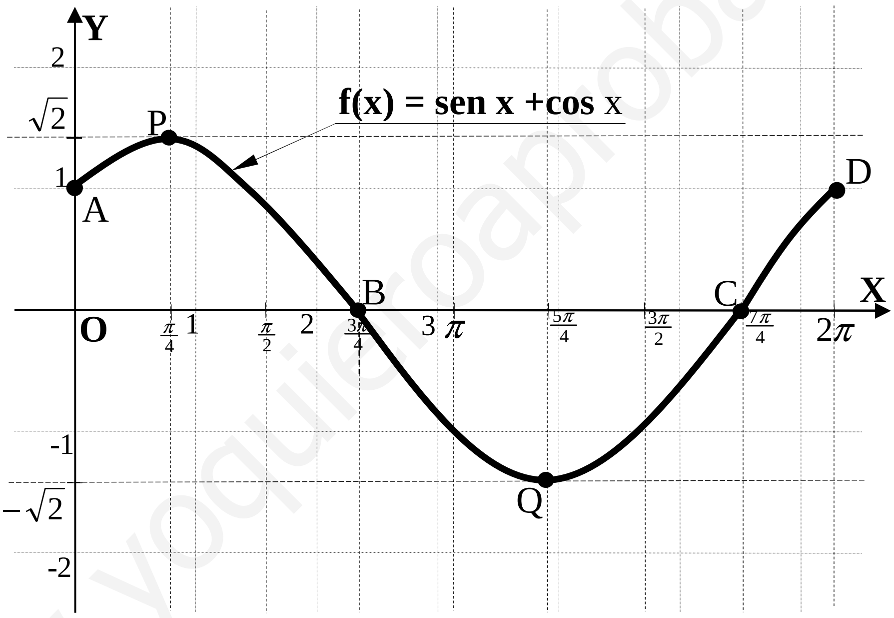
$$Eje\ \ OY\ \Rightarrow\ x=0\ \ ;;\ \ y=f(0)=sen\ 0+\cos\ 0=0+1=1\ \Rightarrow\ \underline{A(0,\ 1)}$$

$$Eje\ \ OX\ \Rightarrow\ f(x)=0\ \ ;;\ \ sen\ x+\cos\ x=0\ \ ;;\ \ sen\ x=-\cos\ x\ \ ;;\ \ tag\ x=-1\ \Rightarrow\ x_1=\frac{3\pi}{4}\ \ ;;$$

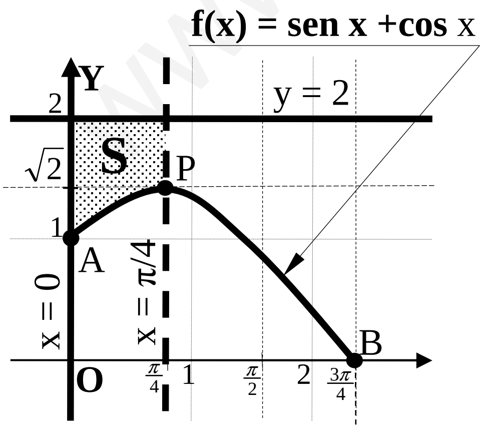
$$x_2=\frac{7\pi}{4}\ \Rightarrow\ \underline{B\left(\frac{3\pi}{4},\ 0\right)}\ \ ;;\ \ C\left(\frac{7\pi}{4},\ 0\right).$$

Teniendo en cuenta que la función f(x) es periódica de periodo 2π, se cumple que $f(0)=f(2\pi)$, por lo cual es punto de la función $D(2\pi,\ 1)$.

La representación gráfica (aproximada) de la función es la siguiente:



b)



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[2-(sen\ \ x+\cos\ \ x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2-sen\ \ x-\cos\ \ x)dx=$$

$$=\left[2x+\cos\ \ x-sen\ \ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+\cos\ \frac{\pi}{4}-sen\ \frac{\pi}{4}\right)-(2\cdot 0+\cos\ \ 0-sen\ \ 0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1+0=\frac{\pi}{2}-1=\underline{\underline{\frac{\pi-2}{2}\ u^2}}=S$$

****

CUESTIONES

1ª) Sea $\alpha \neq 0$ un número real, y las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{\alpha}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$. Para el valor de α para el que r y s son paralelas, hallar el plano que las contiene.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ \alpha)$ y $\overrightarrow{v_s} = (4,\ 2,\ -2)$.

Para que las rectas r y s sean paralelas es necesario que sus vectores directores sean linealmente dependientes:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}.$$

Para determinar el plano π que contiene a las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen el punto de r, O(0, 0, 0), y como extremo el punto de s que se obtiene, por ejemplo, para λ = 1, A(5, 2, 1); $\overrightarrow{w} = (4,\ 2,\ -2)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ x - 5y + 4z - 5z + 2x - 2y = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x - 7y - z = 0}}$$

****

2ª) Estudiar, en función del parámetro λ, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

El rango de una matriz es el número de líneas (filas o columnas) que son linealmente independientes, o dicho de otra manera: es el orden del menor complementario de mayor dimensión que puede formarse en el determinante de la matriz.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2-1-1+\lambda-(2-\lambda)-(2-\lambda)=-\lambda(2-\lambda)^2-2+\lambda-4+2\lambda=$$

$$=-\lambda\left(4-4\lambda+\lambda^2\right)+3\lambda-6=-4\lambda+4\lambda^2-\lambda^3+3\lambda-6=-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-6=0\ ;;\ \lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0$$

Resolviendo por Ruffini:

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	$\boxed{0}$
-1		-1	3	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		

Las soluciones de la ecuación resultante son $\underline{\lambda_1=2}$, $\underline{\lambda_2=-1}$ y $\underline{\lambda_3=3}$.

Para $\lambda=-1\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}$

Para $\lambda=2\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}$

Para $\lambda=3\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} \lambda\neq -1 \\ \lambda\neq 2 \\ \lambda\neq 3 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ Rango\ \ A=3}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} \lambda=-1 \\ \lambda=2 \\ \lambda=3 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ Rango\ \ A=2}}$$

****

3ª) Probar que la ecuación $x^{2009} - e^{x} + 2 = 0$ tiene alguna solución.

Considerando la función $f(x) = x^{2009} - e^{x} + 2$, que es continua en su dominio, que es R, le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo real que se considere. Sea, por ejemplo, el intervalo $(-2,\ 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = (-2)^{2009} - e^{-2} + 2 = -2^{2009} - \dfrac{1}{e^{2}} + 2 < 0 \\ \\ f(0) = 0^{2009} - e^{0} + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 > 0 \end{array}\right\}$$

Según el Teorema de Bolzano, la función $f(x) = x^{2009} - e^{x} + 2$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2,\ 0)$, lo que prueba que

La ecuación $x^{2009} - e^{x} + 2 = 0$ *tiene al menos una solución real* (c.q.p.)

****

4ª) Calcular $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \ ;; \ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt \\ x = t^2 \rightarrow (1+x) = 1+t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2 \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\underline{2\ arc\ tag\sqrt{x} + C = I}}$$

****