

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****SEPTIEMBRE – 2010 (ESPECÍFICO)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos****Indicaciones:**

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$, se pide determinar:

- a) El dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas.
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.
- c) La gráfica de f.

a)

La función está definida para cualquier valor real de x: $D(f) \Rightarrow R$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\underline{\text{Eje X}} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{e^x} = 0 \;; \; (x+3)^2 = 0 \;; \; x = -3 \Rightarrow \underline{\underline{A(-3, 0)}}.$$

$$\underline{\text{Eje } Y} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{(0+3)^2}{e^0} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow \underline{\underline{B(0, 9)}}.$$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+3)}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \underline{0}.$$

$$y = k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+3)^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\infty+3)^2}{e^{-\infty}} = \underline{+\infty}$$

El semieje positivo OX es asíntota horizontal de f(x).

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$e^x = 0 \Rightarrow \underline{x \notin R} \Rightarrow$$

La función f(x) no tiene asíntotas verticales.

Oblicuas: Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.

La función f(x) no tiene asíntotas verticales.

b)

Una función es creciente o decreciente en su dominio cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2(x+3) \cdot e^x - (x+3)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2(x+3) - (x+3)^2}{e^x} = \frac{(x+3) \cdot [2 - (x+3)]}{e^x} =$$

$$= \frac{(x+3) \cdot (2-x-3)}{e^x} = -\frac{(x+3) \cdot (x+1)}{e^x} = -\frac{x^2 + 4x + 3}{e^x} = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -3} \ ; \ ; \ \underline{x_2 = -1}.$$

Las raíces encontradas dividen el dominio de f(x), que es R, en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes, por lo cual, basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo $(-1, \infty)$, (al que pertenece el valor trivial $x = 0$):

$$f'(0) = -\frac{3 \cdot 1}{e^0} = -3 < 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\underline{Crecimiento: x \in (-3, -1) \quad ; \quad ; \quad \underline{\underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)}}}}$$

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(2x+4) \cdot e^x - (x^2+4x+3) \cdot e^x}{e^{2x}} = -\frac{(2x+4) - (x^2+4x+3)}{e^x} = \\ &= -\frac{2x+4-x^2-4x-3}{e^x} = \frac{x^2+2x-1}{e^x} = \underline{\underline{f''(x)}}. \end{aligned}$$

$$f''(-3) = \frac{(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 1}{e^{-3}} = \frac{9-6-1}{e^{-3}} = 2e^3 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo relativo para x = -3.}}$$

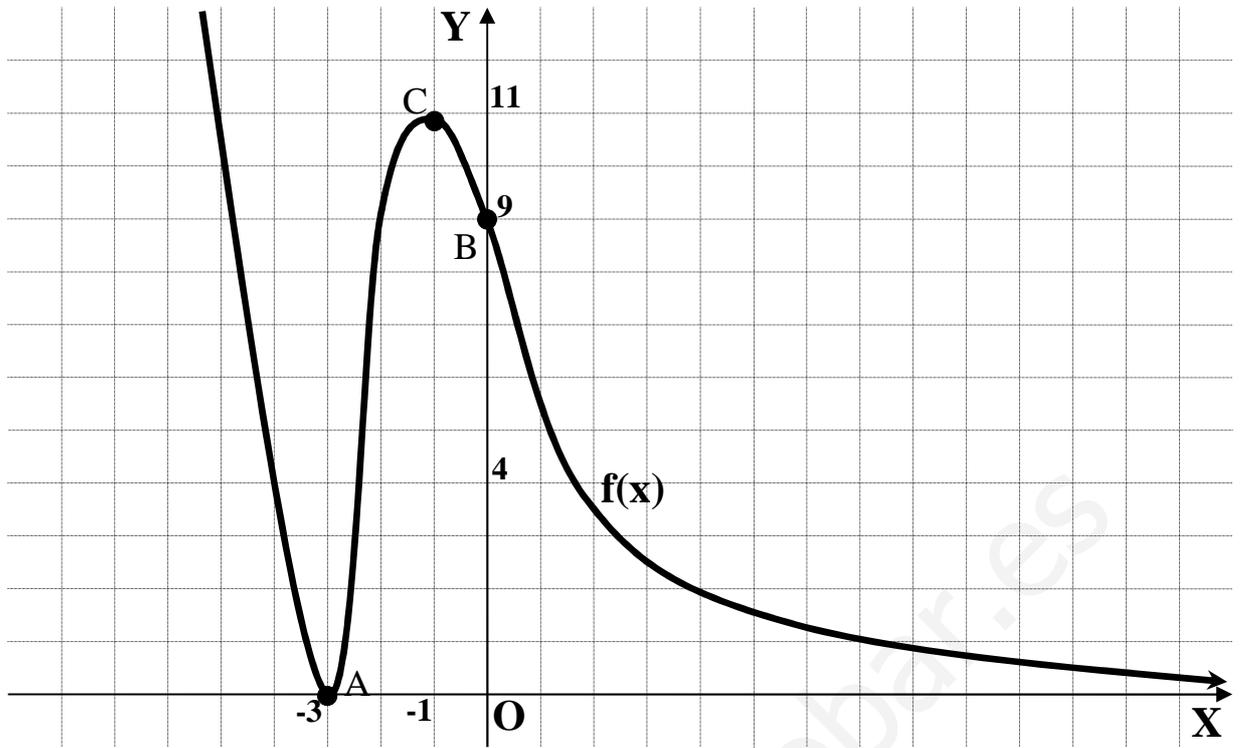
$$f(-3) = \frac{(-3+3)^2}{e^{-3}} = \frac{0}{e^{-3}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo: A(-3, 0)}}.$$

$$f''(-1) = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1}{e^{-1}} = \frac{1-2-1}{e^{-1}} = -2e^3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo relativo para x = -1.}}$$

$$f(-1) = \frac{(-1+3)^2}{e^{-1}} = \frac{4}{e^{-1}} = 4e \Rightarrow \underline{\underline{Máximo: C(-1, 4e)}}.$$

c)

Con los datos obtenidos puede dibujarse, aproximadamente, la gráfica de f. que es la siguiente.



www.yoquieroaprobar.es

3º) Hallar la ecuación general del plano α que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$.

El vector normal del plano $\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

Un vector director de la recta r puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtiene al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -2, 0)$.

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = j + 2i = 2i + j = \underline{(2, 1, 0)} = \vec{u}.$$

La ecuación del plano α la determinan el punto $A(1, 0, -1)$ y los vectores \vec{u} y \vec{n} .

$$\alpha(A; \vec{u}, \vec{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 2(x-1) - 2(z+1) - (z+1) - 4y = 2(x-1) - 3(z+1) - 4y =$$

$$= 2x - 2 - 3z - 3 - 4y = 0.$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv 2x - 4y - 3z - 5 = 0}}$$

4º) a) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (I es la matriz identidad). Probar que A admite inversa y utilizar la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.

b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Hallar razonadamente los valores de m para los que el sistema es compatible determinado.

a)

$A^2 - 3A = -2I$;; $|A \cdot (A - 3I)| = -2$. Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los módulos de las matrices:

$|A| \cdot |A - 3I| = -2$. Sabiendo que el determinante de una suma de matrices es la suma de los determinantes de las matrices:

$$|A| \cdot |A| \cdot (-3) = -2 \quad ;; \quad |A|^2 = \frac{2}{3} \quad ;; \quad |A| = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{A \text{ es inversible, c. q. p.}}}$$

$$A^2 - 3A = -2I \quad ;; \quad A \cdot (A - 3I) = -2I \Rightarrow \text{Multiplicando por la izquierda por } A^{-1}:$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot (A - 3I) = -2A^{-1} \quad ;; \quad I \cdot (A - 3I) = -2A^{-1} \quad ;; \quad \underline{\underline{A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (A - 3I)}}.$$

b)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes es tres (igual que la matriz ampliada).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 2m - 1 - 8 = 4m - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m = \frac{9}{4}}} \Rightarrow m \neq \frac{9}{4} \Rightarrow \text{Rango } B = 3.$$

El sistema es compatible determinado $\forall m \in R, m \neq \frac{9}{4}$

OPCIÓN B

1º) De $f : R \rightarrow R$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. Hallar la expresión de f .

$$f'(x) = \int (x^2 + 2x + 2) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 2x + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + C = \underline{f'(x)}.$$

Por tener tangente horizontal para $x = 1$ tiene que cumplirse que $f'(1) = 0$:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^3}{3} + 1^2 + 2 \cdot 1 + C = 0 \quad ; ; \quad \frac{1}{3} + 3 + C = 0 \quad ; ; \quad \underline{C = -\frac{10}{3}}.$$

La función derivada es $\underline{f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{10}{3}}$.

La función $f(x)$ es la integral indefinida de la función derivada:

$$f(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - \frac{10}{3} \right) \cdot dx = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{10}{3}x + D = \underline{\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10}{3}x + D}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ contiene a $P(1, 2)$ tiene que ser $f(1) = 2$:

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{1^4}{12} + \frac{1^3}{3} + 1^2 - \frac{10}{3} \cdot 1 + D = 2 \quad ; ; \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{10}{3} + D = 2 \quad ; ; \quad m. c. m. = 12 \Rightarrow$$

$$1 + 4 + 12 - 40 + 12D = 24 \quad ; ; \quad 12D = 24 - 17 + 40 = 47 \quad ; ; \quad \underline{D = \frac{47}{12}}.$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{47}{12} = \frac{1}{12}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 40x + 47)}}.$$

2º) a) Sean $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Hallar $g[f(x)]$.

b) Calcular $I = \int (x+3) \cdot e^{x+2} \cdot dx$.

a)

La función $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ puede redefinirse de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{x - |x|}{2} = \frac{1}{2}(x - |x|) \Rightarrow \underline{f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

$$\underline{\underline{g[f(x)] = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}}$$

b)

$$I = \int (x+3) \cdot e^{x+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+3 = u \rightarrow du = dx \\ e^{x+2} \cdot dx = dv \rightarrow v = e^{x+2} \end{array} \right\} \Rightarrow I = (x+3) \cdot e^{x+2} - \int e^{x+2} \cdot dx =$$

$$= (x+3) \cdot e^{x+2} - e^{x+2} + C = e^{x+2} (x+3-1) + C.$$

$$\underline{\underline{I = e^{x+2} (x+2) + C}}$$

3º) a) Determinar las coordenadas del punto A' simétrico de A(-2, 1, 6) respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

b) Hallar la distancia de A a r.

a)

Un vector de r es $\vec{v} = (1, 2, 2)$.

El plano π , perpendicular a r por A, es el que tiene como vector normal \vec{v} y contiene al punto A:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(-2, 1, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + D = 0 \quad ; \quad \underline{D = -12} \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 2y + 2z - 12 = 0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2} \\ \pi \equiv x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{array} \right\} r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (-1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 12 = 0 \quad ; \quad -1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda - 12 = 0 \quad ; \quad 9\lambda = 9 \quad ;$$

$$\underline{\lambda = 1} \Rightarrow \underline{N(0, 5, 1)}.$$

Para que A' sea el punto simétrico de A con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overline{AN} = \overline{NA'} \Rightarrow N - A = A' - N \quad ; \quad (0, 5, 1) - (-2, 1, 6) = (x, y, z) - (0, 5, 1) \quad ;$$

$$(2, 4, -5) = (x - 0, y - 5, z - 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 0 = 2 \rightarrow \underline{x = 2} \\ y - 5 = 4 \rightarrow \underline{y = 9} \\ z - 1 = -5 \rightarrow \underline{z = -4} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A'(2, 9, -4)}.$$

b)

La distancia de A a r es la misma que la distancia entre los puntos A(-2, 1, 6) y N(0, 5, 1):

$$d(A, r) = \overline{AN} = \sqrt{(0+2)^2 + (5-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\underline{\underline{d(A, r) = 3\sqrt{5} \text{ unidades}}}$$

4º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^{-1} .

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + 2A \cdot B = B$.

a)

Para obtener la matriz inversa de A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - \frac{2}{3}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$A \cdot X + 2A \cdot B = B \quad ; ; \quad A \cdot X = B - 2A \cdot B = (I - 2A) \cdot B.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (I - 2A) \cdot B \quad ; ; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot (I - 2A) \cdot B \quad ; ; \quad \underline{\underline{X = A^{-1} \cdot (I - 2A) \cdot B}}$$

$$I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} - \frac{2}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$
