PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Sea $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$:

a) Calcular $\int f(t)\cdot dt$.   b) Sea $g(x)=\int_0^x f(t)\cdot dt$. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$.

----

a)

$$\int f(t)\cdot dt=\int\frac{1}{1+e^t}\cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e^t=x^2 \\ t=2Lx \\ dt=\frac{2}{x}\cdot dx\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2}{x}\cdot dx=2\cdot\int\frac{1}{x(1+x^2)}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{x}=\frac{Ax^2+Bx+C+Cx^2}{x(1+x^2)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ \underline{B=0} \\ \underline{C=1}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(t)\cdot dt=2\int\left(\frac{-x}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot dx=-2\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx+2\int\frac{1}{x}\cdot dx=-2M+2Lx=\int f(t)\cdot dt. \quad (*)$$

$$M=\int \frac{x}{1+x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+x^2=u \\ 2xdx=du \\ xdx=\frac{1}{2}\cdot du \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\cdot du=\frac{1}{2}Lu=\underline{\frac{1}{2}L\left(1+x^2\right)=M}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de M, resulta:

$\int f(t)\cdot dt=-2\cdot\frac{1}{2}L\left(1+x^2\right)+2Lx+C=L\frac{x^2}{1+x^2}+C$. Deshaciendo el cambio de variable:

$$\underline{\underline{\int f(t)\cdot dt=L\frac{e^t}{1+e^t}+C}}$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

$$\int f(t)\cdot dt=\int \frac{1}{1+e^t}\cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e^t=u \\ e^t\,dt=du \\ dt=\frac{1}{u}\cdot du \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\cdot dx=\int \frac{1}{u(1+u)}\cdot du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(1+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{1+u}=\frac{A+Au+Bu}{u(1+u)}=\frac{(A+B)u+A}{u(1+u)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ \underline{A=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(t)\cdot dt=\int\left(\frac{1}{u}+\frac{-1}{1+u}\right)\cdot du=\int\frac{1}{u}\cdot du-\int\frac{1}{1+u}\cdot du=L|u|-L|1+u|+C=L\left|\frac{u}{1+u}\right|+C.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\underline{\underline{\int f(t)\cdot dt=L\frac{e^t}{1+e^t}+C}}$.

b)

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\left[L\frac{e^t}{1+e^t}\right]_0^x=L\frac{e^x}{1+e^x}-L\frac{e^0}{1+e^0}=L\frac{e^x}{1+e^x}-L1=L\frac{e^x}{1+e^x}-0=\underline{\underline{L\frac{e^x}{1+e^x}}}=g(x).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{L\frac{e^x}{1+e^x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{Le^x-L\left(1+e^x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-L\left(1+e^x\right)}{x}=\frac{0-L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow In\det.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1-\frac{1}{1+1}=1-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{ae^{2x}}{1+x}$, se pide:

a) Hallar α para que la pendiente de la recta tangente a la función en x = 0 valga 2.

b) Para α = 1, estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

c) Para α = 1, hallar sus asíntotas.

----

a)

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{2ae^{2x}\cdot(1+x)-ae^{2x}\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{2ae^{2x}\cdot(2+2x-1)}{(1+x)^2}=\underline{\frac{2ae^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^2}=f'(x)}.$$

$$m=f'(0)=2=\frac{ae^0\cdot(0+1)}{(1+0)^2}=\frac{a}{1}=\underline{\underline{a=2}}.$$

b)

Para α = 1 la función es $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+x}$ y $f'(x)=\frac{e^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^2}$.

$f'(x)$ es mayor o menor que cero según que lo sea la expresión $(2x+1)$.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow R-\{-1\}$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$x<-\tfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decrecimiento: (-\infty,\ -1)\cup\left(-1,\ -\tfrac{1}{2}\right)}}$$

$$x>-\tfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Crecimiento: \left(-\tfrac{1}{2},\ +\infty\right)}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{e^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^2}=0\ ;;\ 2x+1=0\ ;;\ \underline{x=-\frac{1}{2}}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{e^{-1}}{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{2}{e}=f\left(-\tfrac{1}{2}\right)}.$$

Teniendo en cuenta que para $x=-\frac{1}{2}$ la función pasa de ser decreciente a creciente, la función tiene un mínimo relativo para ese valor. No obstante, lo vamos a justificar mediante la segunda derivada, que tiene que ser positiva para ese valor de x.

$$f''(x)=\frac{\left[2e^{2x}\cdot(2x+1)-e^{2x}\cdot 2\right]\cdot(1+x^2)-e^{2x}\cdot(2x+1)\cdot 2\cdot(1+x)\cdot 1}{(1+x)^4}=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot(4x+2+2)\cdot(1+x)-2e^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^3}=\frac{e^{2x}\cdot(4x+4)\cdot(1+x)-2e^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^3}=$$

$$=\frac{2e^{2x}\cdot(2x+2)(1+x)-2e^{2x}\cdot(2x+1)}{(1+x)^3}=\frac{2e^{2x}\cdot(2x+2x^2+2+2x-2x-1)}{(1+x)^3}=\underline{\frac{2e^{2x}\cdot(2x^2+2x+1)}{(1+x)^3}=f''(x)}$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{2e^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}-1+1\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{e\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{8}{e}>0\Rightarrow \underline{\textit{Mínimo, c.q.j.}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{e}\right)}}$$

c)

Para α = 1 la función es $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+x}$ y sus asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\frac{e^{\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función f(x) no tiene asíntotas horizontales.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$1+x=0\Rightarrow$ La recta x = -1 es asíntota vertical.

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{2x}}{1+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty\Rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{cases}.$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro α.

b) Resolver el sistema para α = 1.

c) Resolver el sistema para α = -2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2=0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $\underline{a_1=1}$ y $\underline{a_2=-2}$.

$$Para \left. \begin{matrix} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\ a=1\ es\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ A = Rango\ A' = 1}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 1 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ indeterminado$$

(dos grados de libertad)

$$Para\ \ a=-2\ \ es\ \ A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ \ y\ \ A'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=Rango\ \ A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-2 \Rightarrow Rango\ \ A=Rango\ \ A'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

(un grado de libertad)

b)

Para α = 1 el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, equivalente a la ecuación $\{x+y+z=0$.

Como tenemos una ecuación con tres incógnitas, tenemos dos parámetros; la solución es:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \qquad ,\ \forall\lambda,\ \mu\in R \\ z=-\lambda-\mu \end{cases}}}$$

c)

Para α = -2 el sistema resulta $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, resulta $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; haciendo, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=-\lambda \\ x+y&=2\lambda \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} -x+2y&=\lambda \\ x+y&=2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3y=3\lambda\ \ ;;\ \ \underline{y=\lambda}\ \ ;;\ \ x+y=2\lambda \to \underline{x=\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda,\ \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Se consideran las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ y $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

a) Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.

b) Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.

----

a)

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 2)$ y uno de la recta s es $\overrightarrow{v} = (3,\ 1,\ -1)$.

Como quiera que los vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso haremos lo siguiente: determinamos un tercer vector, $\overrightarrow{a}$, que tenga como origen un punto de r, por ejemplo A(0, 1, 3), y por extremo un punto de s, por ejemplo, B(2, 0, -1):

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ -1) - (0,\ 1,\ 3) = (2,\ -1,\ -4).$$

Si el rango de $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{a}\}$ es 3, r y s se cruzan y si el rango es 2, se cortan:

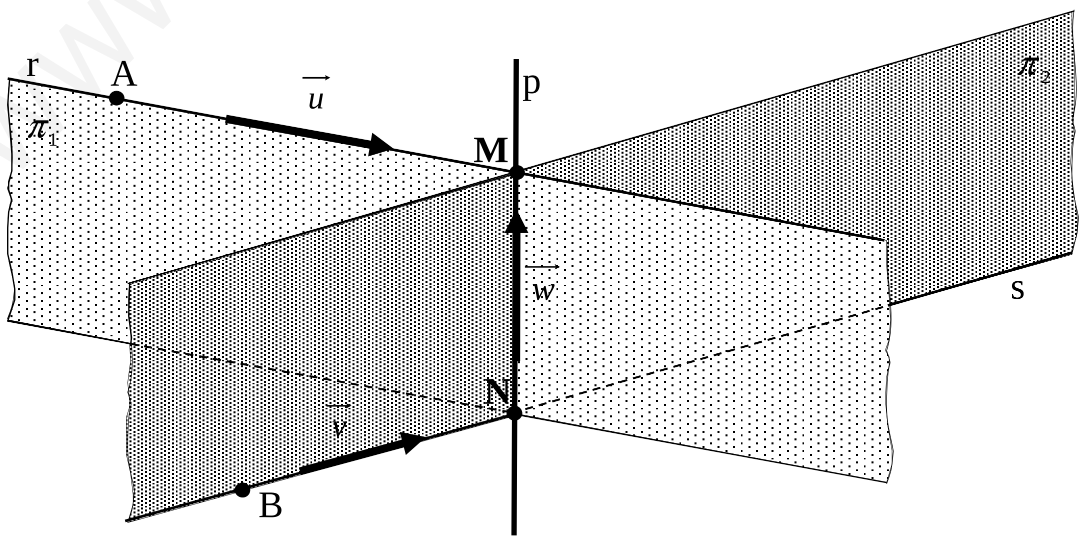
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 4 - 4 - 1 - 24 = -35 \neq 0 \Rightarrow Rango\ de\ [\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{a}] = 3.$$

$$\underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan}}$$

(como teníamos que justificar)

b)

En primer lugar vamos a determinar la recta p, perpendicular común a las rectas dadas, para lo cual nos guiamos por el siguiente gráfico.



Consideramos un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas, que ya conocemos.

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 4j + k + 4k - 2i + j = 5j + 5k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (0,\ 1,\ 1)}.$$

Ahora determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -2x + (z-3) - 2x - (y-1) = 0 \ ;;$$

$$-4x + z - 3 - y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 4x + y - z + 2 = 0}.$$

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-2) + 3(z+1) + (x-2) - 3y = 0 \ ;;$$

$$2(x-2) - 3y + 3(z+1) = 0 \ ;;\ 2x - 4 - 3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv 2x - 3y + 3z - 1 = 0}.$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$\underline{\underline{p \equiv \begin{cases} 4x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 1 = 0 \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcular $\int \frac{1}{x^2+2x+3} \cdot dx$

b) Calcular los valores del parámetro α para que las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=ax^3+2x^2+3$ en los puntos de abscisas x = 1 y x = -1 sean perpendiculares.

----

a)

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} \cdot dx. \qquad x^2+2x+3=0 \;;;\; x=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow \underline{x \notin R}.$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} \cdot dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+2} \cdot dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{\sqrt{2}}=t \\ dx=\sqrt{2}\,dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1} \cdot \sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\ tag\ \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}.$$

$$\underline{\underline{\int \frac{1}{x^2+2x+3} \cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\ tag\ \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}}$$

b)

Para resolver este apartado tenemos que recordar dos cosas:

1ª.- La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

2ª.- Dos rectas perpendiculares tienen sus pendientes inversas y con signo contrario.

$$f'(x)=3ax^2+4x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = f'(1)=\underline{3a+4} \\ \\ m_2 = f'(-1)=\underline{3a-4} \end{array} \right\} \Rightarrow 3a+4=\frac{-1}{3a-4} \;;;\; (3a+4)(3a-4)=-1 \;;;$$

$$9a^2-16=-1 \;;;\; 9a^2=15 \;;;\; 3a^2=5 \;;;\; a^2=\frac{5}{3} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow \underline{\underline{a_1=\frac{\sqrt{15}}{3}}} \;;;\; \underline{\underline{a_2=-\frac{\sqrt{15}}{3}}}.$$

****

2º) Se considera la función $f(x)=e^x+Lx,\ x\in(0,\ \infty)$ donde L denota el logaritmo neperiano.

a) Estudiar la monotonía y las asíntotas de f(x).

b) Demuestra que la ecuación $x^2e^x-1=0$ tiene una única solución c en el intervalo $[0,\ 1]$.

c) Deducir que f presenta un punto de inflexión en c. Esbozar la gráfica de f.

----

a)

$$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}=0>0,\ \forall x\in(0,\ +\infty).$$

La función f(x) es monótona creciente en su dominio.

No tiene asíntotas horizontales por ser $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+Lx)=+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+Lx)=1-\infty=\underline{-\infty}.$$

La recta x = 0 es asíntota vertical de f(x).

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+Lx}{x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+\frac{1}{x}\right)=\infty+0=\infty.$$

f(x) no tiene asíntotas oblicuas.

b)

Demostrar que la ecuación $x^2e^x-1=0$ tiene una única solución c en el intervalo $[0,\ 1]$ es equivalente a demostrar que la función $g(x)=x^2e^x-1$ se anula una sola vez en el intervalo anterior.

La función $g(x)=x^2e^x-1$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma: “Si una función g es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $g(c)=0$”.

$$g(0)=0-1=-1<0 \ ;; \ g(1)=e-1>0.$$

Vamos a probar que la solución es única. Si la función tuviera al menos otra raíz real x = λ en el intervalo considerado, indicaría que g(λ) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función g(x) el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta que la función es, además de continua, derivable en el intervalo considerado.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo: “Si g(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que g(a) = g(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que g’(x) = 0”.

$g'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2-x)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \ ;; \ \underline{x_2=2}$. Como se aprecia, ninguna de las raíces pertenece al intervalo (0, 1), lo cual significa que no existe el valor λ en el intervalo considerado y, en consecuencia:

<u>La ecuación $x^2e^x - 1 = 0$ tiene una única solución x = c en el intervalo [0, 1], c. q. d.</u>

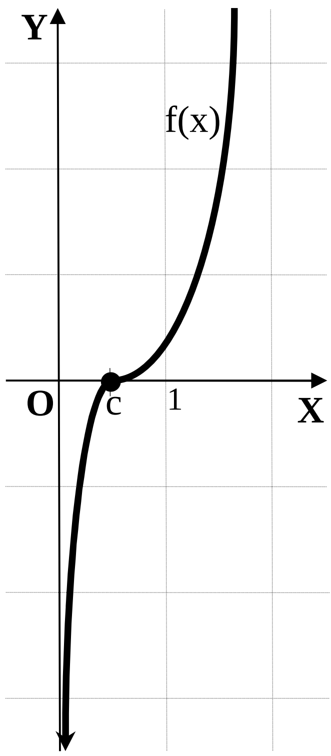
c)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x)=e^x+\frac{1}{x} \ ;; \ f''(x)=e^x-\frac{1}{x^2}=0 \ ;; \ e^x x^2-1=0.$$

Por ser f(x) monótona creciente en su dominio, la única solución es para x = c, que es la única solución de la ecuación $f''(x)=0 \Rightarrow e^x x^2-1=0$, lo que implica que la solución x = c es el único punto de inflexión de f(x), como se nos pedía deducir.

Teniendo en cuenta que la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función y que es monótona creciente y que tiene un punto de inflexión en el punto P(c, 0) siendo c un valor perteneciente al intervalo (0, 1), la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



****

3º) Sea M una matriz cuadrada que cumple la ecuación $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad.

a) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso informativo expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) Hallar todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la siguiente ecuación: $M^2 - 2M = 3I$.

----

a)

La expresión $M^2 - 2M = 3I$ puede ponerse de la forma:

$$M^2 - 2M = 3I \;\Rightarrow\; M \cdot (M - 2I) = 3I \;\;;;\;\; M \cdot \frac{M - 2I}{3} = I .$$

Teniendo en cuenta que $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$, de lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{M^{-1} = \frac{M - 2I}{3}}}$$

$$\underline{\underline{Existe \;\; M^{-1} \;\; cuando \;\; |M| \neq 0 \;\; y \;\; |M - 2I| \neq 0}}$$

b)

$$M^2 - 2M = 3I \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\;;;$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ -2b & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \end{cases} \;\;\rightarrow\; 2b(a-1) = 0 \rightarrow \underline{a = 1} \;\; o \;\; \underline{b = 0} .$$

$$\underline{a = 1} \Rightarrow 1 + b^2 - 2 = 3 \;\;;;\;\; b^2 = 4 \Rightarrow \underline{b_1 = 2} \;\;;;\;\; \underline{b_2 = -2} \Rightarrow \underline{\underline{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}} .$$

$$\underline{b = 0} \Rightarrow a^2 - 2a = 3 \;\;;;\;\; a^2 - 2a - 3 = 0 \;\;;;\;\; a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1 = -1} \;\;;;\;\; \underline{a_2 = 3} \Rightarrow \underline{\underline{M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}} .$$

****

4º) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P(2, 1, 3) y Q(1, 3, 1); los otros dos sobre la recta r que pasa por R(-4, 7, -6).

a) Calcular la ecuación de la recta r.

b) Calcular la ecuación del plano π que contiene al cuadrado.

c) Hallar las coordenadas de uno de los otros vértices.

----

a)

Los puntos P(2, 1, 3) y Q(1, 3, 1) determinan el vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QP}=(1,\ -2,\ 2)$.

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QP}=(1,\ -2,\ 2)$ y pasa por el punto $R=(-4,\ 7,\ -6)$; su expresión, por ejemplo, en unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r\equiv\begin{cases}x=-4+\lambda\\ y=7-2\lambda\\ z=-6+2\lambda\end{cases}}}$$

b)

El plano que contiene al cuadrado contiene a los tres puntos P, Q y R dados.

El vector $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{RP}=(6,\ -6,\ 9)$ es director del plano π.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z-3\\ 6 & -6 & 9\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$-12(x-2)+9(y-1)-12(z-3)+6(z-3)+18(x-2)-12(y-1)=0\ ;;$$

$$6(x-2)-3(y-1)-6(z-3)=0\ ;;\ 2(x-2)-(y-1)-2(z-3)=0\ ;;\ 2x-4-y+1-2z+6=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv 2x-y-2z+3=0}}$$

c)

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión general la siguiente: $\alpha\equiv x-2y+2z+D=0$. De todos los planos del haz α, el plano β que contiene al punto, por ejemplo P(2, 1, 3), es el que satisface su ecuación:

$$2-2\cdot 1+2\cdot 3+D=0\ ;;\ 2-2+6+D=0\ ;;\ D=-6\ \Rightarrow\ \underline{\beta\equiv x-2y+2z-6=0}.$$

El punto S de intersección del plano β con la recta r es un vértice del cuadrado:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = -6 + 2\lambda \end{cases} \\ \beta \equiv x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-4+\lambda) - 2(7-2\lambda) + 2(-6+2\lambda) - 6 = 0 \ ;;$$

$$-4 + \lambda - 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda - 6 = 0 \ ;; \ 9\lambda - 36 = 0 \ ;; \ \lambda - 4 = 0 \ ;; \ \underline{\lambda = 4} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{S(0,\ -1,\ 2)}}.$$

****