

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcular M^{-1} para $a = 0$.

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -5$, calcular $|2B^t|$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{vmatrix} = 5a + 5 - 10a = 0; \quad 5 - 5a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

M es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\text{Para } a = 0 \text{ es } M = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}. \quad M^t = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad |M| = 5.$$

$$\text{Adj. de } M^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

b)

Se deben tener en cuenta las siguientes propiedades de las matrices y los determinantes:

1.- El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta.

2.- El producto de un número real por una matriz es otra matriz cuyos elementos quedan todos multiplicados por dicho número.

3.- Si los elementos de una fila de un determinante se multiplican por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|2B^t| = 2^3 \cdot |B^t| = 8 \cdot (-5) = -40.$$

$$\underline{|2B^t| = -40.}$$

2º) a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero de distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

b) Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia sea mínima al punto $A(-1, 2, 0)$.

a)

El vector $\vec{u}$ pedido tiene las siguientes características:

$$\vec{u} = (-2a, -a, 2a), \text{ con } a > 0 \text{ y } |\vec{u}| = 4.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2a)^2 + (-a)^2 + (2a)^2} = 4; \sqrt{4a^2 + a^2 + 4a^2} = 4; \sqrt{9a^2} = 4;$$

$$3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{\vec{u} = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)}.$$

b)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$.

El haz de planos β perpendiculares a r tiene la siguiente expresión dada en forma general o implícita: $\beta \equiv x - y + 2z + D = 0$.

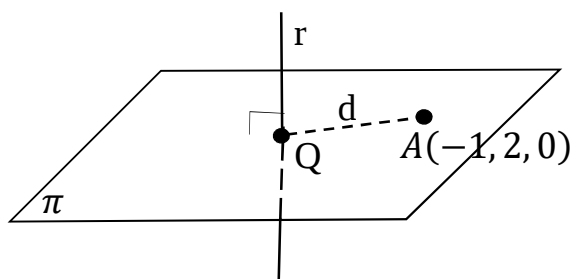
De los infinitos planos de haz β , el plano π que contiene al punto $A(-1, 2, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \beta \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ A(-1, 2, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0.$$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$1 - \lambda + 2 - \lambda + 6 - 4\lambda + 3 = 0; 12 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \underline{Q(-1, 0, -1)}.$$

La distancia entre A y r es la misma que la distancia entre A y Q :

$$d(A, r) = \overline{AQ} = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (0 - 2)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{0 + 4 + 1} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{d(A, r) = \sqrt{5} \text{ unidades.}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) a) Calcular a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $P(1, 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga extremo relativo en dicho punto.

b) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución positiva.

a)

Por pasar por $P(1, 1)$: $f(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Por tener pendiente nula en $P(1, 1)$:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0$; $3 + 2a + b = 0$; $2a + b = -3$.

Por no tener extremo relativo en $P(1, 1)$ tiene que ser $f''(1) = 0$:

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$; $3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

$2a + b = -3 \Rightarrow 2 \cdot (-3) + b = -3$; $-6 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = 3}$.

$a + b + c = 0 \Rightarrow -3 + 3 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

b)

Considerando la función $f(x) = x^5 + x - 1$, que por ser polinómica es continua y derivable en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, según el teorema de Bolzano, en el intervalo $(0, 1)$ la función $f(x)$ tiene, al menos una raíz $x = a \in (0, 1)$, tal que $f(a) = 0$.

Vamos a demostrar ahora, como se pide, que la raíz es única.

Si la función $f(x)$ tuviera al menos otra raíz real positiva $x = b$, indicaría que $f(b) = 0$, con lo cual se podría aplicar el teorema de Rolle, teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

Si $b > a$, tendría que existir un valor positivo c , tal que $a < c < b$, para el cual se anularía la primera derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como se demuestra a continuación, es imposible:

$f'(x) = 5x^4 + 1$ y siendo $c > 0$ es: $f'(c) \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$, lo cual contradice el teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una sola raíz positiva, como se tenía que probar.

4º) a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

b) Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{e^{0^+} - 1} = \infty - \infty \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \frac{1 - 1 - 0}{0 \cdot 0} = \\ &= \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x} = \frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

b)

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A(1, 0).$$

$$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow B(-1, 0).$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = m_1 = -2.$$

$$t_1 \Rightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2 \Rightarrow t_1 \equiv y = -2x + 2.$$

$$f'(-1) = m_2 = 2.$$

$$t_2 \Rightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2 \Rightarrow t_2 \equiv y = 2x + 2.$$

Las dos tangentes pasan por el punto $C(0, 2)$.

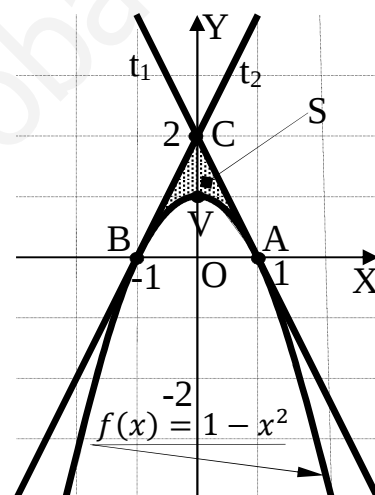
El vértice de la parábola $f(x) = 1 - x^2$ es el siguiente:

$$f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow V(0, -1).$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, es la indicada en la figura adjunta.

Conviene observar la simetría con respecto al eje Y del conjunto.

De la observación de la figura se deduce al área a calcular, que es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \int_0^2 [t_1 - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [(-2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx = \\
 &= 2 \cdot \int_0^2 (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right) - 0 \right] = \\
 &= \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{4}{3} u^2}.$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro m , el sistema $\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ x + my + z = 2m \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$.

b) Resolverlo para $m = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + m + 1 - m^2 - 1 + m = -2m^2 + 2m =$$

$$= -2m(m - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 1.$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } m = 0 \text{ es } A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3.$$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow \text{Rang } A = 2; \text{ Rang } A' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Para } m = 1 \text{ es } A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \text{Rang } A' = 2.$$

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

b)

Para $m = 1$ el sistema es $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

$$\text{Haciendo } y = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 2 - \lambda \\ x - z = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 - \lambda; \left. \begin{array}{l} x + z = 2 - \lambda \\ -x + z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow z = 1.$$

Para $m = 1$ las soluciones son: $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Consideremos las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

b) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s .

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r : $A(0, 0, 1)$ y $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$. Recta s : $B(0, 1, 0)$ y $\vec{v}_s = (2, 3, 1)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, -1)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 2 + 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}$ no son coplanarios.

Las rectas r y s se cruzan, como se quería comprobar.

b)

En primer lugar determinamos un plano α que contiene a la recta r y pase por el origen:

El punto $A(0, 0, 1) \in r$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OA} = (0, 0, 1)$.

$$\alpha(O; \vec{v}_r, \overrightarrow{OA}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - 2y = 0.$$

Ahora determinamos otro plano β que contiene a s y pasa por el origen:

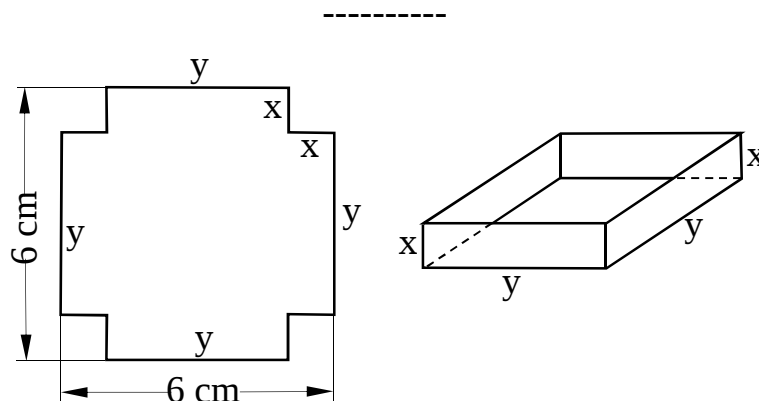
El punto $B(0, 1, 0) \in s$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 0)$.

$$\beta(O; \vec{v}_s, \overrightarrow{OB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv x - 2z = 0.$$

La recta t pedida, expresada por unas ecuaciones implícitas y también por unas ecuaciones paramétricas, es la que determinan los planos α y β :

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}} \Rightarrow y = z = \lambda, x = 2\lambda \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

3º) Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo.



De la observación de la figura se deduce que: $y + 2x = 6 \rightarrow y = 6 - 2x$.

$$V = y^2 \cdot x \Rightarrow V(x) = x \cdot (6 - 2x)^2.$$

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 1 \cdot (6 - 2x)^2 + x \cdot [2 \cdot (6 - 2x)(-2)] = (6 - 2x)(6 - 2x - 4x) = \\ &= 2(3 - x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x) = 12(x^2 - 4x + 3). \end{aligned}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(3 - x)(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1.$$

La solución $x = 3$ carece de sentido por ser imposible la construcción; se trata de un mínimo. La solución lógica de máximo es para $x = 1$. Se comprueba a continuación:

$$V''(x) = 12(2x - 4) = 24(x - 2).$$

$$V''(3) = 24(3 - 2) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 3.$$

$$V''(1) = 24(1 - 2) = -24 < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = 1.$$

El volumen de la caja es máximo cortando un cm de cada esquina.

4º) a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = Lx$, el eje OX y la recta $x = 3$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Ind. del tipo } n^\infty \text{ e} \Rightarrow \left\{ \alpha = \frac{1}{x} \mid \begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ \alpha \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} =$$

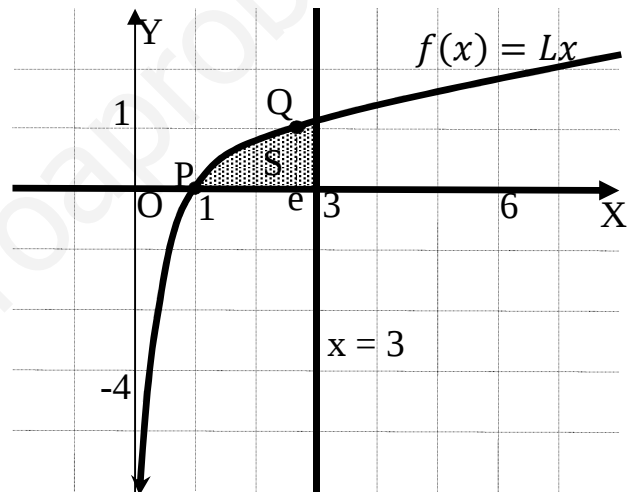
$$= \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha}} = e^0 = \underline{1}.$$

b)

La gráfica de la función $f(x) = Lx$ pasa por los puntos $P(1, 0)$ y $Q(e, 1)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica el gráfico adjunto.

De la observación de la gráfica se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_1^3 Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \Big|_1^3 =$$

$$= [Lx \cdot x - \int dx]_1^3 = [x \cdot Lx - x]_1^3 = (3 \cdot L3 - 3) - (1 \cdot L1 - 1) = 3L3 - 3 + 1 =$$

$$= 3L3 - 2 \cong 3,30 - 2 = 1,30.$$

$$\underline{S = (L27 - 2) u^2 \cong 1,30 u^2.}$$
