PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas.

1º) En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 euros y a 6 euros, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 gramos de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2,4 kg de azúcar. Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

Sean $x\ e\ y$ el número de tartas y bizcochos que se hornean cada día, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 400x + 300y \le 6.000 \\ 200x + 100y \le 2.400 \\ x \ge 0;\ y \ge 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x + 3y \le 60 \\ 2x + y \le 24 \\ x \ge 0;\ y \ge 6 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 4x + 3y \le 60 \Rightarrow y \le \frac{60-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	15
y	20	0

$② \Rightarrow 2x + y \le 24 \Rightarrow y \le 24 - 2x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	12
y	24	0

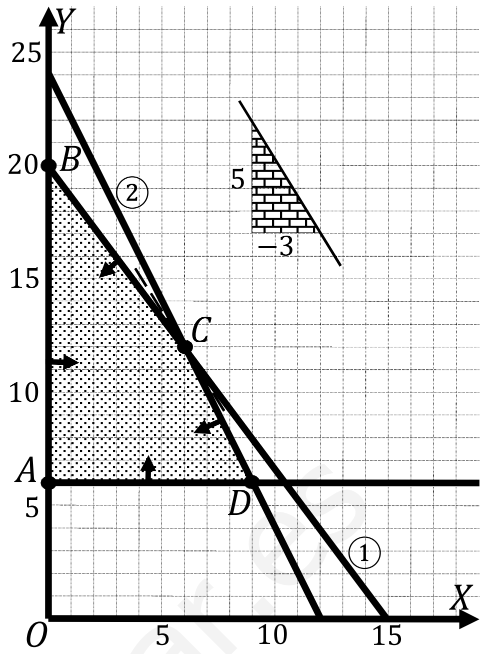
La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 4x + 3y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 60;\ \ y = 20 \Rightarrow B(0,20).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ 2x+y=24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ -4x-2y=-48 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$y=12;\;\; 2x+12=24;\;\; 2x=12;\;\; x=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(6,12)$.

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=6 \\ 2x+y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+6=24;$$

$2x=18;\;\; x=9 \Rightarrow D(9,6)$.

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y)=10x+6y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,6)=10\cdot 0+6\cdot 6=0+36=36$.

$B \Rightarrow f(0,20)=10\cdot 0+6\cdot 20=0+120=120$.

$C \Rightarrow f(6,12)=10\cdot 6+6\cdot 12=60+72=132$.

$D \Rightarrow f(9,6)=10\cdot 9+6\cdot 6=90+36=126$.

El valor máximo se produce en el punto $C(6,12)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=10x+6y=0 \Rightarrow y=-\frac{10}{6}x=-\frac{5}{3}x \Rightarrow m=-\frac{5}{3}$.

$\underline{\text{Los ingresos son máximos horneando } 6 \text{ tartas y } 12 \text{ bizcochos.}}$

$\underline{\text{El ingreso máximo es de } 132 \text{ euros.}}$

****

2º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{array}\right\}$, en función del parámetro a:

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2+2+2a-1+2a-4=0;\ \ 4a=5 \Rightarrow a=\tfrac{5}{4}.$$

$$\underline{Para\ a \neq \tfrac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=\tfrac{5}{4} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2+2-2-1-2-4=-9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=\tfrac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-2+2-4+2+2-4}{-2+2+2-1+2-4}=\frac{-4}{-1}=4.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2-2-1-1-2+2}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2+2-2-1-2-4}{-1} = \frac{-9}{-1} = 9.$$

$\underline{Solución: x = 4, y = 6, z = 9}.$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & si\ \ x\le 1\\ \frac{b}{x} & si\ \ x>1\end{cases}$:

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitado por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $(0,1)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(4-x^2)=3=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{b}{x}=b\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow b=3.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ b=3.}$$

b)

En el intervalo $(0,1)$ la función es $f(x)=4-x^2$, cuyas ordenadas son todas positivas en el mencionado intervalo, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1(4-x^2)\cdot dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(4\cdot 1-\frac{1^3}{3}\right)-0=$$

$$=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}.$$

$$\underline{S=\frac{11}{3}\ u^2.}$$

****

4º) Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación "x", de acuerdo con la siguiente función: $N(x)=x^3-9x^2+24x+64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento?

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo $[0,7]$ ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará?

----

a, b)

$N(0)=64.$

$$\underline{Los\ socios\ fundadores\ fueron\ 64.}$$

$N(7)=7^3-9\cdot 7^2+24\cdot 7+64=343-441+168+64=575-441=$

$=134.$

$$\underline{Dentro\ de\ 7\ años\ haba\ 134\ socios.}$$

Para saber si se disuelve en ese momento la sociedad o debería haberse disuelto antes hemos de saber el comportamiento de la función.

$N'(x)=3x^2-18x+24=0;\ \ x^2-6x+8=0;\ \ x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=$

$=\frac{6\pm 2}{2}=3\pm 1\Rightarrow x_1=2, x_2=4.$ $\qquad N''(x)=6x-18.$

$N''(2)=6\cdot 2-18=-6<0\Rightarrow$ Máximo relativo para $x=2$.

$N''(4)=6\cdot 4-18=4>0\Rightarrow$ Mínimo relativo para $x=4$.

El número de socios crece a partir del cuarto año.

$N(5)=5^3-9\cdot 5^2+24\cdot 5+64=125-225+120+64=309-225=$

$=84<100.$

$N(6)=6^3-9\cdot 6^2+24\cdot 6+64=216-324+144+64=424-324=$

$=100.$

$$\underline{Debe\ disolverse\ la\ sociedad\ en\ ese\ momento, a\ los\ 7\ años.}$$

De lo estudiado anteriormente se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: N'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0,2) \cup (4,7)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: N'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(2,4)}.$$

El número de socios de la entidad en los 7 primeros años es el siguiente:

$N(0) = 64.$

$N(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 64 = 1 - 9 + 24 + 64 = 89 - 9 = 90.$

$N(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 64 = 8 - 36 + 48 + 64 = 120 - 36 = 84.$

$N(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + 64 = 27 - 81 + 72 + 64 = 163 - 81 = 82.$

$N(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 64 = 64 - 144 + 96 + 64 = 84.$

$N(5) = 84.$ $N(6) = 100.$ $N(7) = 134.$

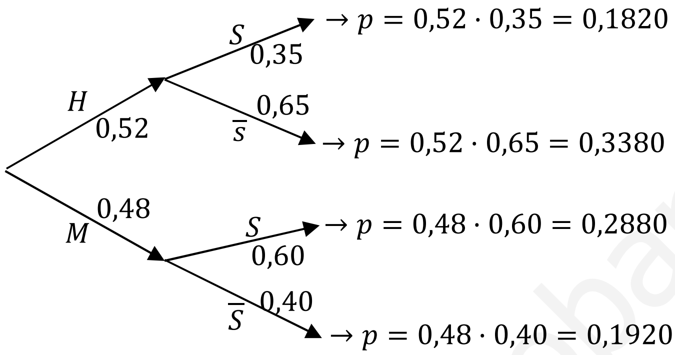
$$\underline{El\ mínimo\ número\ de\ socios\ fue\ de\ 64\ y\ se\ produjo\ al\ comienzo}.$$

****

5º) En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica “spinning” así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique “spinning”.

b) Si el socio elegido no practica “spinning”, obtener la probabilidad de que sea una mujer.



a)

$$P = P(S) = P(H \cap S) + P(M \cap S) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) =$$

$$= 0{,}52 \cdot 0{,}35 + 0{,}48 \cdot 0{,}60 = 0{,}1820 + 0{,}2880 = \underline{0{,}4700}.$$

b)

$$P = P\left(M/\overline{S}\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{P(M) \cdot P\left(\overline{S}/M\right)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}48 \cdot 0{,}40}{1 - 0{,}47} = \frac{0{,}192}{0{,}53} = \underline{0{,}3623}.$$

****

6º) El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

----

a)

$Datos$: $\mu = 120;\ \ \sigma = 20.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(120, 20).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-120}{20}$.

$P = P(X > 150) = P\left(Z > \frac{150-120}{20}\right) = P\left(Z > \frac{30}{20}\right) = P(Z > 1{,}5) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \underline{0{,}0668}.$

$\underline{El\ 6{,}68\ \%\ de\ los\ adultos\ tienen\ riesgos\ de\ padecer\ la\ enfermedad\ A.}$

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

$Datos$: $\mu = 120;\ \ \sigma = 20;\ \ n = 20.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(120;\ \frac{20}{\sqrt{20}}\right) = N(120;\ 4{,}47).$ $Z = \frac{X-120}{4{,}47}$.

$P = P(110 < X < 125) = P\left(\frac{110-120}{4{,}47} < Z < \frac{125-120}{4{,}47}\right) =$

$= P\left(\frac{-10}{4{,}47} < Z < \frac{5}{4{,}47}\right) = P(-2{,}24 < Z < 1{,}12) =$

$= P(Z \leq 1{,}12) - [1 - P(Z \leq 2{,}24)] = P(Z \leq 1{,}12) - 1 + P(Z \leq 2{,}24) =$

$= 0{,}8686 - 1 + 0{,}9875 = 1{,}8561 - 1 = \underline{0{,}8561}.$

****

Cuestiones.

1ª) Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años. ¿Qué edad tiene el hijo?

Sea x la edad actual del hijo; la edad actual del padre es $(x+22)$.

$x+(x+22)=46;\ \ 2x+22=46;\ \ x+11=23 \Rightarrow x=12.$

$\underline{El\ hijo\ tiene\ actualmente\ 12\ años}.$

****

2ª) De la función $f(x)=ax-33+\frac{5}{x}$, determinar a para que se verifique $f'(1)=2$.

$f'(x)=a-0-\frac{5}{x^2}=a-\frac{5}{x^2}.$

$f'(1)=2 \Rightarrow a-\frac{5}{1^2}=2;\ \ a-5=2 \Rightarrow \underline{a=7}.$

****

3ª) La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 1,1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

$Datos:\ \mu=6{,}8;\ \ \sigma=1{,}1.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma)=N(6{,}8;\ 1{,}1).$ Tipificando la variable: $Z=\frac{X-6{,}8}{1{,}1}$.

$P=P(X>9)=P\left(Z>\frac{9-6{,}8}{1{,}1}\right)=P\left(Z>\frac{2{,}2}{1{,}1}\right)=P(Z>2)=$

$=1-P(Z<2)=1-0{,}9772=\underline{0{,}0228}.$

****