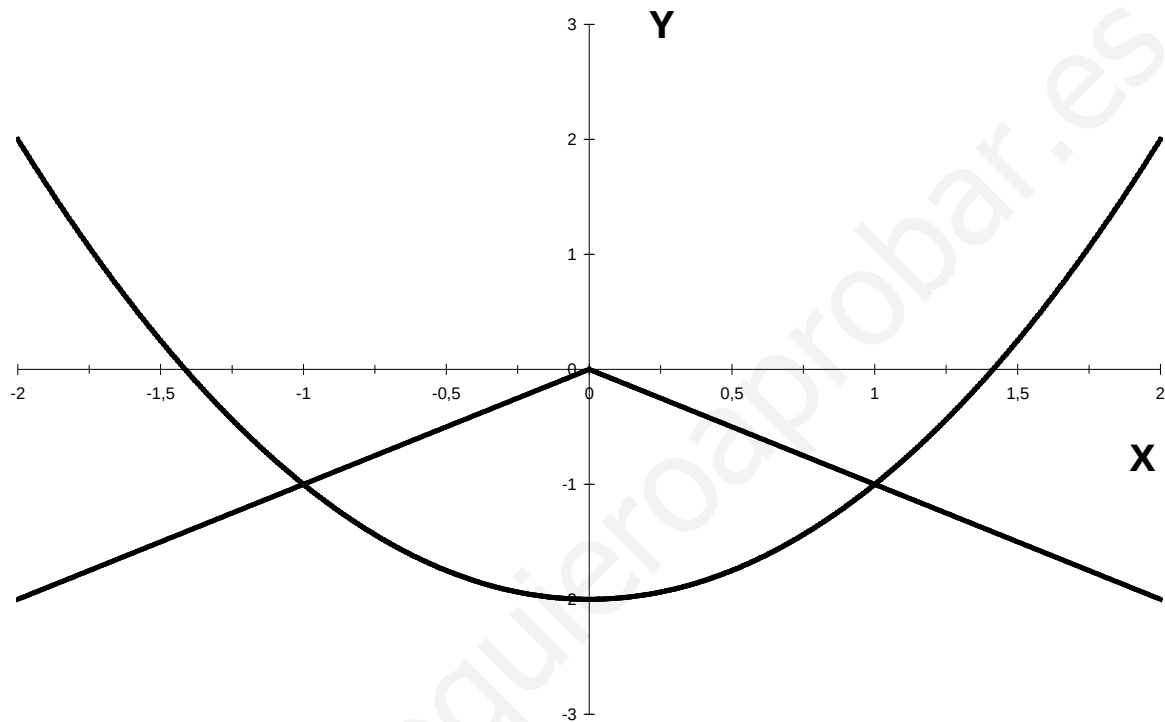


PRIMER BLOQUE

A Hallar el área del recinto plano delimitado por las curvas de ecuación: $y=x^2-2$ e $y=-|x|$. Dibujar el recinto.

$$x > 0 \Rightarrow y = \begin{cases} -(-x) & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Puntos de corte entre funciones

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \Rightarrow \text{No} \end{cases} \\ x < 0 \Rightarrow x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \Rightarrow \text{No} \end{cases} \end{cases}$$

Es simétrica respecto a **OY**

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^1 (x^2 - 2) dx \right| - 2 \cdot \left| \int_0^1 (-x) dx \right| = 2 \cdot \int_1^0 (x^2 - 2) dx - 2 \cdot \int_1^0 (-x) dx =$$

$$A = 2 \cdot \int_1^0 (x^2 + x - 2) dx = \frac{2}{3} \cdot [x^3]_1^0 + \frac{2}{2} \cdot [x^2]_1^0 - 4 \cdot [x]_1^0$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot (0^3 - 1^3) + (0^2 - 1^2) - 4 \cdot (0^2 - 1^2) = -\frac{2}{3} - 1 + 4 = \frac{-2 - 3 + 12}{3} = \frac{7}{3} u^2$$

B Dados los puntos $A(-2,-4,-3)$ y $B(2,6,5)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.

Analizaremos si las rectas r y s tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

Para hallar s tenemos como vector director $\overrightarrow{AB}$ y como punto de generación A

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} = (2, 6, 5) - (-2, -4, -3) = (4, 10, 8) \equiv (2, 5, 4) \\ 3x - 2z = 3 \Rightarrow 3x = 2z + 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}z + 1 \Rightarrow \frac{2}{3}z + 1 - y + z = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}z \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \end{cases}$$

Veamos si tienen un punto común

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda = 2 + 2\mu \\ 5\lambda = 6 + 5\mu \\ 3\lambda = 5 + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 1 \\ 5\lambda - 5\mu = -6 \\ 3\lambda - 4\mu = -5 \end{cases} \Rightarrow \text{Es compatible si } |A/B| = 0$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & -6 \\ 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 50 + 36 - 20 + 15 - 48 - 50 = -17 \neq 0 \Rightarrow \text{No tienen punto común}$$

$$\text{Veamos si son paralelos} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (2, 5, 4) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{5}{5} \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

Las rectas r y s se cruzan en el espacio

SEGUNDO BLOQUE

A Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} &= \frac{0 - \operatorname{sen} 0}{\operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen} 0} = \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x} = \frac{\cos^2 0 (1 - \cos 0)}{1 - \cos^3 0} = \frac{1^2 (1 - 1)}{1 - 1^3} = \frac{0}{0} = \\
 &= \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \operatorname{sen} x (1 - \cos x) + \operatorname{sen} x \cos^2 x}{-3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} x (2 - 2 \cos x + \cos)}{3 \cos^2 x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos x}{3 \cos x} = \frac{2 - \cos 0}{3 \cos 0} = \frac{2 - 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

B Hallar el punto simétrico del punto $A(2,-3,5)$ respecto del plano $\alpha \equiv x-3y+4z+21=0$.

Hallaremos una recta r que pasando por A sea perpendicular al plano α , como el vector director de este es perpendicular a él este será el vector director de la recta.

Una vez obtenida la recta r hallaremos el punto Q de corte de ella con el plano que es el punto medio entre A y su simétrico A'

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, -3, 4) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Hallemos el punto } Q \Rightarrow$$

$$2 + \lambda - 3(-3 - 3\lambda) + 4(5 + 4\lambda) + 21 = 0 \Rightarrow 2 + \lambda + 9 + 9\lambda + 20 + 16\lambda + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$26\lambda + 52 = 0 \Rightarrow 26\lambda = -52 \Rightarrow \lambda = -\frac{52}{26} = -2 \Rightarrow \text{Punto medio } Q \begin{cases} x = 2 + (-2) \\ y = -3 - 3(-2) \\ z = 5 + 4(-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{A'} = 0 \Rightarrow x_{A'} = -2 \\ 3 = \frac{-3 + y_{A'}}{2} \Rightarrow -3 + y_{A'} = 6 \Rightarrow y_{A'} = 9 \\ -3 = \frac{5 + z_{A'}}{2} \Rightarrow 5 + z_{A'} = -6 \Rightarrow z_{A'} = -11 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 9, -11)$$

TERCER BLOQUE

A Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & \text{si } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Continuidad

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow \text{No derivable en } x = 1$$

B Hallar una matriz X que verifique la condición $A+BX=C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BX = C - A \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}(C - A) \Rightarrow IX = B^{-1}(C - A) \Rightarrow X = B^{-1}(C - A)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (\text{adj } B^t) \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B^{-1} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ C - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$X = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A Calcular $\int \frac{3x}{x^2 + 2x + 3} dx$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución en el campo real}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2 + 2x + 3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{6x + 6 - 6}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x + 3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{6}{x^2 + 2x + 3} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx - \frac{6}{2} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} - 3 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 3 = t \Rightarrow (2x + 2) dx = dt \qquad x + 1 = u \Rightarrow dx = du$$

$$= \frac{3}{2} \ln t - 3 \int \frac{1}{u^2 + 2} dx = \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - 3 \int \frac{1}{2 \left(\frac{u^2}{2} + 1 \right)} du =$$

$$\frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1} du = \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{2} \int \frac{\sqrt{2}}{r^2 + 1} dr =$$

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = r \Rightarrow du = \sqrt{2} dr$$

$$I = \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} r = \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right)$$

$$I = \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + K$$

B Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha \equiv x+y=1$, $\beta \equiv ax+z=0$ y $\gamma \equiv x+y+z=2$, según los diferentes valores del parámetro a .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - a = -a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en un punto}$

Cuando $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow \text{La } 1^a \text{ y la } 2^a \text{ no son paralelas} \\ \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow \text{La } 1^a \text{ y la } 3^a \text{ no son paralelas} \Rightarrow \\ \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{La } 2^a \text{ y la } 3^a \text{ no son paralelas} \end{cases}$$

en Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas