

PRIMER BLOQUE

A El coste de producción de x unidades de un producto viene dado por la expresión $C = x^2 - 300x + 100$ ptas. y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ ptas. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

$$B = xU - C \Rightarrow B = x(1000 - x) - (x^2 - 300x + 100) = 1000x - x^2 - x^2 + 300x - 100 = -2x^2 + 300x - 100$$

$$B' = \frac{dB}{dx} = -4x + 300 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow -4x + 300 = 0 \Rightarrow 4x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{4} = 75 \Rightarrow$$

$$B'' = \frac{d^2B}{dx^2} = -4 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow x = 75 \text{ unidades}$$

B Hallar la distancia del punto $P(2,4,1)$ al plano $\alpha \equiv 3x+4y+12z-8=0$, y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia del punto P .

$$d(P, \alpha) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{|6 + 16 + 12 - 8|}{\sqrt{169}} = \frac{|26|}{13} = \frac{26}{13}$$

Para encontrar el punto Q del plano mas cercano al punto P , hallaremos una recta r que pase por P y que es perpendicular al plano siendo su vector director el mismo del plano.

Una vez hallada calcularemos el punto de corte de la recta y el plano que es el punto pedido

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\alpha = (3, 4, 12) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 1 + 12\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Punto de intersección } Q \Rightarrow 3 \cdot (2 + 3\lambda) + 4 \cdot (4 + 4\lambda) + 12 \cdot (1 + 12\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 9\lambda + 16 + 16\lambda + 12 + 144\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 169\lambda + 26 = 0 \Rightarrow 169\lambda = -26 \Rightarrow \lambda = -\frac{26}{169} \Rightarrow$$

$$Q \begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{26}{169}\right) \\ y = 4 + 4 \cdot \left(-\frac{26}{169}\right) \\ z = 1 + 12 \cdot \left(-\frac{26}{169}\right) \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{260}{169}, \frac{572}{169}, -\frac{143}{169}\right)$$

SEGUNDO BLOQUE

A Calcular $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

$$x^3+x^2-6x=0 \Rightarrow (x^2+x-6)x=0 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow \Delta=1-4 \cdot 1 \cdot (-6)=1+24=25 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow x^3+x^2-6x = x(x+3)(x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

$$A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3) = x+1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow A(0+3)(0-2) + B \cdot 0 \cdot (0-2) + C \cdot 0 \cdot (0+3) = 0+1 \Rightarrow -6A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{6} \\ x=-3 \Rightarrow A(-3+3)(-3-2) + B(-3)(-3-2) + C(-3)(-3+3) = -3+1 \Rightarrow 15B=-2 \Rightarrow B=-\frac{2}{15} \\ x=2 \Rightarrow A(2+3)(2-2) + B \cdot 2 \cdot (2-2) + C \cdot 2 \cdot (2+3) = 2+1 \Rightarrow 10C=3 \Rightarrow C=\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = -\frac{1}{6x} - \frac{2}{15(x+3)} + \frac{3}{10(x-2)}$$

$$I = \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{6} \cdot \ln x - \frac{2}{15} \int \frac{dt}{t} + \frac{3}{10} \int \frac{du}{u}$$

$$\text{Cambio de variable} \Rightarrow \begin{cases} x+3=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{6} \cdot \ln x - \frac{2}{15} \ln t + \frac{3}{10} \ln x = \ln \frac{x^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{1}{6}} x^{\frac{2}{15}}} = \ln \frac{x^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{6}{30} + \frac{4}{30}}} = \ln \frac{x^{\frac{9}{30}}}{x^{\frac{10}{30}}} = \ln \sqrt[30]{\frac{x^9}{x^{10}}} = \ln \sqrt[30]{\frac{1}{x}} = \ln \frac{1}{\sqrt[30]{x}}$$

$$I = \ln \frac{1}{\sqrt[30]{x}} + K$$

B Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del

parámetro a , y resolverlo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$$

Para que sea compatible (determinado o indeterminado) una de las ecuaciones tiene que ser combinación lineal de las otras, por lo tanto el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada tiene que ser nulo

$$\begin{aligned} |A/B| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & a-10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & a-10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & -2-a \\ 0 & -5 & a-10-2a \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2-a \\ -5 & -a-10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a+30-10-5a=0 \Rightarrow 20-2a=0 \Rightarrow 20=2a \end{aligned}$$

Si $a = 10$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 15 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Si } a = 10 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 3 = \text{Número de incógnitas}$$

$$\Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow -3z = -12 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow y + 4 = 10 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x - 6 = 5 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (11, 6, 4)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{10\} \Rightarrow \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A/B) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

TERCER BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua.

Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + b \cdot 0 = a \end{array} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow a = 0 \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b \cdot 1 = 0 + b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{array} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b = 3 \right. \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } 3 \neq 0 \Rightarrow$$

No es derivable

B Hallar el punto simétrico del punto A(1,2,3) respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

Hallaremos un plano π perpendicular a la recta r , que tiene como vector director el de la recta, y que contenga al punto **A**, por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por A y el punto **G**, genérico del plano, como son perpendiculares tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado

$$y = 1 + x \Rightarrow z = -1 + 2x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 2) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, 1, 2) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0 \Rightarrow x-1 + y-2 + 2z-6 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + 2z - 9 = 0$$

Continuación de Problema B del Tercer Bloque

Una vez obtenido el plano hallaremos el punto de corte **Q** de este con la recta, ese es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'** respecto a la recta

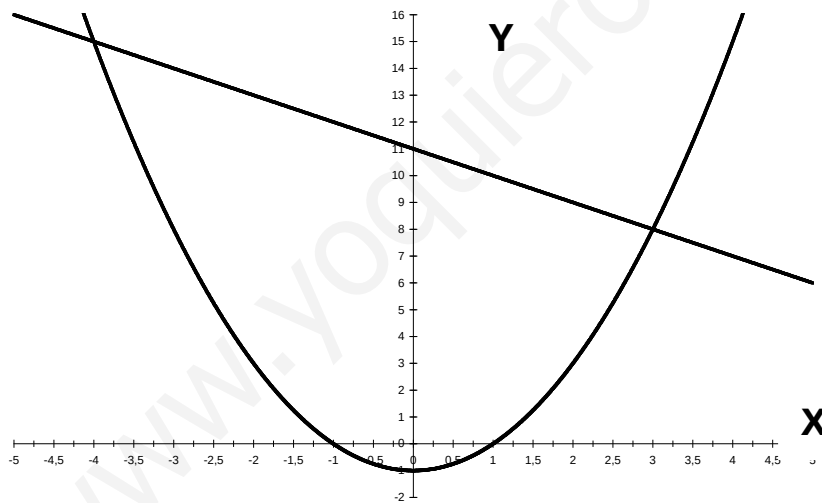
$$\lambda + (1 + \lambda) + 2 \cdot (-1 + 2\lambda) - 9 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 + \lambda - 2 + 4\lambda - 9 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 10 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 10 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow Q \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = -1 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{3} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 3 + 3x_{P'} = 10 \Rightarrow 3x_{P'} = 7 \\ \frac{8}{3} = \frac{2 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 6 + 3y_{P'} = 16 \Rightarrow 3y_{P'} = 10 \Rightarrow \\ \frac{13}{3} = \frac{3 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 9 + 3z_{P'} = 26 \Rightarrow 3z_{P'} = 17 \end{cases}$$

$$P' \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3} \right)$$

CUARTO BLOQUE

A Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y=x^2-1$, $y=11-x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.



$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 1 = 11 - x \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+7}{2} = 3 \\ x = \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow A = \int_{-4}^3 (11-x) dx - \int_{-4}^3 (x^2-1) dx = \int_{-4}^3 (-x^2 - x + 12) dx$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-4}^3 - \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-4}^3 + 12 \cdot [x]_{-4}^3 = -\frac{1}{3} \cdot [3^3 - (-4)^3] - \frac{1}{2} \cdot [3^2 - (-4)^2] + 12 \cdot [3 - (-4)]$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot [27 - (-64)] - \frac{1}{2} \cdot (9 - 16) + 12 \cdot (3 + 4) = -\frac{91}{3} + \frac{7}{2} + 84 = \frac{-182 + 21 + 504}{6} = \frac{343}{6} u^2$$

B Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X - 9Y = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow (-11) \cdot Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -36 \\ 6 & -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{1}{(-11)} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9X - 6Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X + 6Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 11 \cdot X = \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 48 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -4 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 33 \\ 44 & 66 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 33 \\ 44 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$