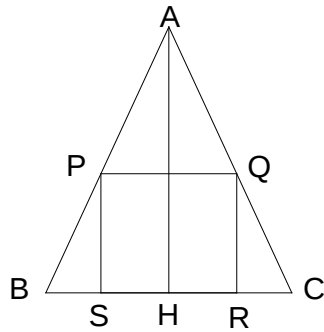


PRIMER BLOQUE

A El triángulo BAC es isósceles en A. La base (BC) mide 12 cm. y la altura (AH) mide 18 cm. Se quiere inscribir un rectángulo PQRS de superficie máxima. Hallar las dimensiones de este rectángulo.



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\overrightarrow{CH}|}{|\overrightarrow{CR}|} = \frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{QR}|} \Rightarrow \frac{6}{|\overrightarrow{CH}| - |\overrightarrow{HR}|} = \frac{18}{|\overrightarrow{QR}|} \Rightarrow \frac{1}{6 - \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{2}} = \frac{3}{|\overrightarrow{QR}|} \Rightarrow \frac{1}{12 - |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{3}{|\overrightarrow{QR}|} \Rightarrow \frac{2}{12 - |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{3}{|\overrightarrow{QR}|} \Rightarrow \\ S = \frac{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}|}{2} \end{array} \right.$$

$$36 - 3 \cdot |\overrightarrow{PQ}| = 2 \cdot |\overrightarrow{QR}| \Rightarrow |\overrightarrow{QR}| = 18 - \frac{3}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \Rightarrow S = |\overrightarrow{PQ}| \cdot \left(18 - \frac{3}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \right) \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{d(|\overrightarrow{PQ}|)} = \left(18 - \frac{3}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| \right) - \frac{3}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ}| = 18 - 3 \cdot |\overrightarrow{PQ}| \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 18 - 3 \cdot |\overrightarrow{PQ}| = 0 \Rightarrow 3 \cdot |\overrightarrow{PQ}| = 18 \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = 6 \Rightarrow S' = \frac{d^2 S}{d(|\overrightarrow{PQ}|)^2} = -3 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{PQ}| = 6 \text{ cm} \\ |\overrightarrow{QR}| = 18 - \frac{3}{2} \cdot 6 = 18 - \frac{18}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm} \end{array} \right.$$

B Determinar la ecuación de un plano que contenga el punto $P(1,-1,3)$ y sea paralelo al plano determinado por los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,1,1)$ y $C(2,-2,1)$. Hallar la distancia entre los dos planos.

Es un plano π que tiene como vector director el del plano α que contiene a los tres puntos, vector que es perpendicular al determinado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{G}$ siendo este el punto generador de la recta y por lo tanto su producto escalar es nulo y la ecuación del plano pedido.

Previamente tenemos que determinar el plano α , este se halla gracias a los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AG}$, siendo G el punto generador del plano, como los tres son coplanarios este último es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (1, 1, 2) = (0, 0, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 1) - (1, 1, 2) = (1, -3, -1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 1, 2) = (x-1, y-1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(y-1) - 3(x-1) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 3x + y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}_\pi = \overrightarrow{v}_\alpha = (3, 1, 0) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, -1, 3) = (x-1, y+1, z-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v}_\pi \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v}_\pi \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(3, 1, 0)(x-1, y+1, z-3) = 0 \Rightarrow 3(x-1) + y+1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$d(\alpha, \pi) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-4 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} u$$

SEGUNDO BLOQUE

A Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+1}, & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 - 2x - 5, & \text{si } -1 < x \leq 4, \\ 5, & \text{si } x > 4. \end{cases}$

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{2 \cdot (-1) + 1} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 5 = 1 + 2 - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 \Rightarrow$$

Continua en $x = -1$

$$\begin{cases} f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 5 = 16 - 8 - 5 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow 3 \neq 5 \Rightarrow$$

No es continua en $x = 4$

Al no ser continua ya no es derivable en $x = 4$, veamos si lo es en $x = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{(2x+1)^2} & \text{si } x < -1 \\ 2x-2 & \text{si } -1 < x < 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\frac{4}{[2 \cdot (-1) + 1]^2} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x)$$

Es derivable en $x = -1$

B Las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ se cruzan. Hallar las ecuaciones de la perpendicular común.

Llamando t a la recta que se busca, después de hallar su vector director como diferencia entre los valores de los puntos de apoyo de las rectas, tenemos que tiene que ser perpendicular a los dos vectores directores de las rectas y por lo tanto sus productos escalares son nulos

$$x = 7 - 2y \Rightarrow 7 - 2y + y - z = 4 \Rightarrow z = 3 - y \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = [7 - 2\lambda - 2, \lambda - (-3), 3 - \lambda - \mu] = (5 - 2\lambda, \lambda + 3, 3 - \lambda - \mu) \\ \vec{v}_r = (-2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (0, 0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-2, 1, -1) \cdot (5 - 2\lambda, \lambda + 3, 3 - \lambda - \mu) = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (0, 0, 1) \cdot (5 - 2\lambda, \lambda + 3, 3 - \lambda - \mu) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -10 + 4\lambda + \lambda + 3 - 3 + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow 6\lambda + \mu = 10 \\ 3 - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 3 \end{array} \right. \Rightarrow 5\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} + \mu = 3 \Rightarrow \mu = 3 - \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{8}{5} \Rightarrow \vec{v}_t = \left(5 - 2 \cdot \frac{7}{5}, \frac{7}{5} + 3, 3 - \frac{7}{5} - \frac{8}{5} \right) = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}, 0 \right) \equiv (1, 2, 0)$$

$$\text{Punto } P \text{ por el que pasa la recta } t \Rightarrow P \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \frac{8}{5} \end{array} \right. \Rightarrow t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \beta \\ y = -3 + 2\beta \\ z = \frac{8}{5} \end{array} \right.$$

TERCER BLOQUE

A Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=|x^2-4x|$ y la recta $y=12$. Dibujar el recinto.

$$x^2 - 4x > 0 \Rightarrow (x-4)x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \Rightarrow x > 4 \end{cases}$$

 $-\infty$

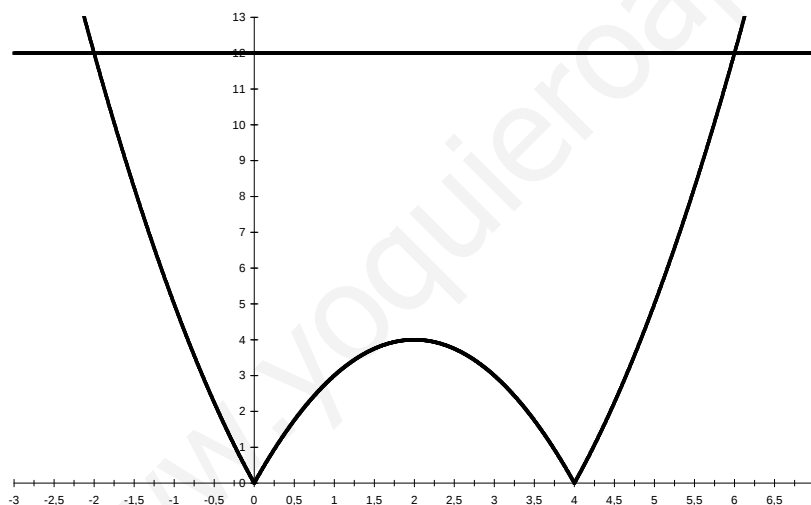
0

4

 ∞

$x > 0$	(-)	(+)	(+)
$x > 4$	(-)	(-)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases} \\ -x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^5 12 \, dx - \int_{-2}^0 (x^2 - 4x) \, dx - \int_0^4 (-x^2 + 4x) \, dx - \int_4^5 (x^2 - 4x) \, dx =$$

$$A = 12 \cdot [x]_{-2}^5 - \frac{1}{3} [x^3]_{-2}^0 + 4 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_{-2}^0 + \frac{1}{3} [x^3]_0^4 - 4 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_0^4 - \frac{1}{3} [x^3]_4^5 + 4 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_4^5$$

$$A = 12 \cdot 7 - \frac{8}{3} - 2 \cdot 4 + \frac{64}{3} - 2 \cdot 16 - \frac{61}{3} + 2 \cdot 9 = 84 + 18 + \frac{64}{3} - \frac{69}{3} - 40 = 62 - \frac{5}{3} = \frac{181}{3} u^2$$

B Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro

a, y resolverlo cuando sea posible:
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 8a - 2 - 10 - 16 + 10 + a = 9a - 18 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 9a - 18 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a = 2$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & -2 \end{array} \right) &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & -36 & 0 & -27 \end{array} \right) \equiv \\ &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -31 \Rightarrow z = -\frac{31}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \end{aligned}$$

CUARTO BLOQUE

A Calcular $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 - 3x - 2 \quad | \quad x^3 - x^2 - 2x \\ -x^4 + x^3 + 2x^2 \quad | \quad x - 2 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \\ 2x^3 - 2x^2 - 4x \quad | \quad \\ \hline -7x - 2 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{-7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 - x - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Continuación del Problema A del Cuarto Bloque

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{-7x - 2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{-7x - 2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \Rightarrow$$

$$A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = -7x - 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow A(0-2)(0+1) + B \cdot 0 \cdot (0+1) + C \cdot 0 \cdot (0-2) = -7 \cdot 0 - 2 \Rightarrow -2A = -2 \\ x=2 \Rightarrow A(2-2)(2+1) + B \cdot 2 \cdot (2+1) + C \cdot 2 \cdot (2-2) = -7 \cdot 2 - 2 \Rightarrow 6B = -16 \\ x=-1 \Rightarrow A(-1-2)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-2) = -7(-1) - 2 \Rightarrow 3C = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{8}{3} \\ C=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{-\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1}$$

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x-2) dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\begin{cases} x-2=t \Rightarrow dx=dt \\ x+1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x - \frac{8}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x - \frac{8}{3} \ln t + \frac{5}{3} \ln u = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln \frac{xu^{\frac{5}{3}}}{t^{\frac{8}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln \frac{x(x+1)^{\frac{5}{3}}}{(x-2)^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln \frac{x(x+1)^{\frac{5}{3}} \sqrt[3]{(x+1)^2}}{(x-2)^2 \sqrt[3]{(x-2)^2}} + K$$

B Resolver la ecuación $ABX - CX = 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(AB - C)X = 2A \Rightarrow (AB - C)^{-1}(AB - C)X = 2(AB - C)^{-1}A \Rightarrow IX = 2(AB - C)^{-1}A \Rightarrow X = 2(AB - C)^{-1}A$$

Veamos si $AB - C$ tiene inversa $\xrightarrow{\text{condicion necesaria}} |AB - C| \neq 0$

$$AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 9 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB - C| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 9 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } \exists (AB - C)^{-1} \Rightarrow (AB - C)^{-1} = \frac{1}{|AB - C|} [adj(AB - C)^t]$$

$$(AB - C)^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(AB - C)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -27 \\ 1 & -3 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB - C)^{-1} = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -27 \\ 1 & -3 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 2 \cdot \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -27 \\ 1 & -3 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \cdot \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -24 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 16 \\ \frac{10}{3} & -\frac{40}{3} \end{pmatrix}$$