

PRIMER BLOQUE

A Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m² de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m² de revestimiento del fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

Siendo **B** el lado de la base cuadrada y **H** la altura

$$\begin{cases} 1000 = B^2 H \Rightarrow H = \frac{1000}{B^2} \\ P = 4 \cdot BH \cdot 100 + B^2 \cdot 200 = 400 \cdot BH + 200 \cdot B^2 = 200 \cdot (2BH + B^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$P = 200 \cdot \left(2B \cdot \frac{1000}{B^2} + B^2 \right) = 200 \cdot \left(\frac{2000}{B} + B^2 \right) \Rightarrow P' = \frac{dP}{dB} = 200 \cdot \left(-\frac{2000}{B^2} + 2B \right)$$

$$P' = 400 \cdot \left(\frac{-1000 + B^3}{B^2} \right) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow \left(\frac{-1000 + B^3}{B^2} \right) = 0 \Rightarrow B^3 - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$B^3 = 1000 \Rightarrow B = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow P'' = \frac{d^2 P}{dB^2} = 400 \cdot \left[\frac{3B^4 - 2B(-1000 + B^3)}{B^4} \right]$$

$$P'' = 400 \cdot \left(\frac{3B^3 + 2000 - 2B^3}{B^3} \right) = 400 \cdot \left(\frac{B^3 + 2000}{B^3} \right) \Rightarrow$$

$$P''(10) = 400 \cdot \left(\frac{10^3 + 2000}{10^3} \right) = 400 \cdot \left(\frac{3000}{1000} \right) = 120 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} B = 10 \text{ m} \\ H = \frac{1000}{10^2} = 10 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Precio} = 200 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 10 + 10^2) = 200 \cdot (200 + 100) = 200 \cdot 300 = 60000 \text{ €}$$

B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1º.- Halla la inversa de $A - BC$. 2º.- Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$

1º.- La condición para tener una matriz inversa es que su determinante sea nulo

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - BC| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 - 1 = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - BC)^{-1} \Rightarrow (A - BC)^{-1} = \frac{1}{|A - BC|} \cdot [\text{adj}(A - BC)]^t$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

$$(A-BC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A-BC)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-BC)^{-1} = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-BC)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

b)

$$(A-BC)X = A \Rightarrow (A-BC)^{-1}(A-BC)X = (A-BC)^{-1}A \Rightarrow IX = (A-BC)^{-1}A \Rightarrow X = (A-BC)^{-1}A$$

$$X = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ 10 & -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2+bx & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para

los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

$$\begin{cases} f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = a(-2)^2 + b \cdot (-2) = 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow 4a - 2b = -3$$

$$\begin{cases} f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 16a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow 16a + 4b = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = -3 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 12a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + b = 0 \Rightarrow -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } -2 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 1 = 2 \Rightarrow \text{Derivable } x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = -2 + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = 1 \Rightarrow \text{No derivable } x = 4 \end{cases}$$

B Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se corten.

Halla el punto de corte.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2 - y \\ z = -3 + y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = k + 3z \\ y = 2 + 2z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = k + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = k + 3\alpha \\ \lambda = 2 + 2\alpha \\ -3 + \lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\alpha = 0 \\ \lambda - \alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\alpha = 0 \\ -2\lambda + 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$-\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow 6 - \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow 2 - 6 = k + 3 \cdot 3 \Rightarrow -4 = k + 9 \Rightarrow k = -13 \Rightarrow$$

$$\text{Punto de corte} \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - 6 \\ y = 6 \\ z = -3 + 6 \end{cases} \Rightarrow P(-4, 6, 3)$$

Nota: Quiero entender que hay un error en el enunciado y que la ecuación de la

$$\text{segunda recta es } \begin{cases} x - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

TERCER BLOQUE

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$; ($\ln$ =logaritmo neperiano)

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) , que cumplen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ siendo } x_0 \in (a, b) \text{ y tales que } g'(x) \neq 0 \text{ para todo valor de } x \text{ en el intervalo}$$

(a, b) . Entonces, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y, además, estos límites son iguales: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

B Clasifica el sistema según los valores de m y resuelve cuando $m = -1$,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \\ x + 3y + m^2z = 3m \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = 5m^2 + 8 + 18 - 15 - 12 - 4m^2 = m^2 - 1 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1$$

$$m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 = \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compat. Determinado}$

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La última es combinación lineal de}$$

las otras dos $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

$$y - 2z = -5 \Rightarrow y = 2z - 5 \Rightarrow x + 4z - 10 + 3z = 2 \Rightarrow x = -7z + 12 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-7\lambda + 12, 2\lambda - 5, \lambda)$$

CUARTO BLOQUE**A** Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} dx$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4)x = 0 \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$$

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx = x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A(2-2)^2 + B \cdot 2 \cdot (2-2) + C \cdot 2 = 2+2 \\ x=0 \Rightarrow A(0-2)^2 + B \cdot 0 \cdot (0-2) + C \cdot 0 = 0+2 \Rightarrow \\ 2A(x-2) + B(x-2) + Bx + C = 1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2A(2-2) + B(2-2) + B \cdot 2 + C = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C = 4 \Rightarrow C = 2 \\ 4A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2B + 2 = 1 \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ 2B + C = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$I = \int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{dt}{t^2}$$

$$x-2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln t + 2 \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x-2} + 2 \cdot \frac{1}{(-1)} \cdot t^{-1} = \ln \sqrt{\frac{x}{x-2}} - \frac{2}{x-2} + K$$

B Halla λ para que el plano $\pi \equiv 2x + \lambda y - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ sean paralelos.

¿Puedes encontrar otro valor de λ para que sean perpendiculares?.

Para ser paralelos recta y plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$r \equiv x = 1 - y \Rightarrow 2 - 2y - z = 2 \Rightarrow z = -2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = -2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{v}_\pi = (2, \lambda, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (-1, 1, -2) \cdot (2, \lambda, -1) = 0$$

$$-2 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Para que sean perpendiculares sus vectores directores tienen que ser iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{v}_\pi = (2, \lambda, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_\pi \Rightarrow \frac{\vec{v}_r}{\vec{v}_\pi} = k \Rightarrow \frac{-1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$$

No hay valor alguno de λ que haga a la recta y el plano perpendicular

$$s \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 4z - 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2y \Rightarrow 2x - 8y + 4 \cdot 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2x - 9 = 0 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\beta = \vec{v}_s = (0, 1, 2) \\ \vec{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\beta \perp \vec{OG} \Rightarrow \vec{v}_\beta \cdot \vec{OG} = 0 \Rightarrow$$

$$(0, 1, 2) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow \beta \equiv y + 2z = 0$$

$$\text{Punto de intersección } Q \Rightarrow \mu + 4\mu = 0 \Rightarrow 5\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 0 \\ z = 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right)$$

$$d(0, s) = d(0, Q) = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{9}{2} u$$