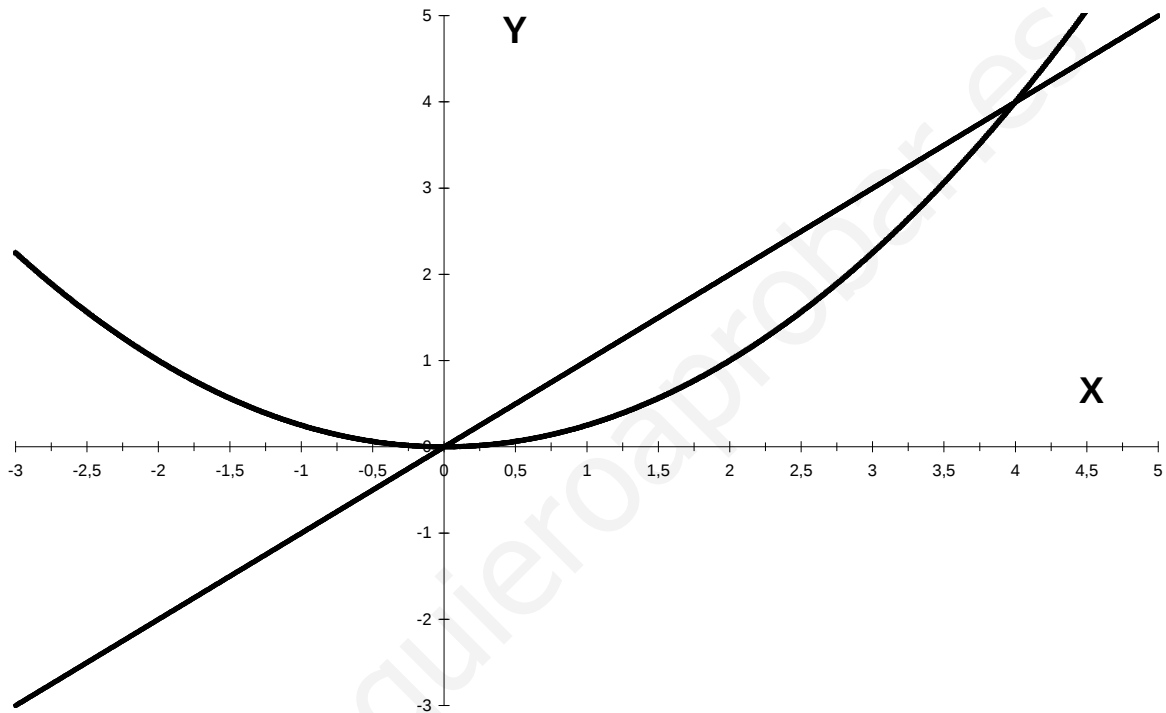


PRIMER BLOQUE

A Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$

- Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.
- Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
- Calcula el área del recinto plano señalado.

a) y b)



Puntos de corte entre funciones $\Rightarrow \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

$$A = \int_0^4 x \, dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^4 = \frac{1}{2} \cdot (4^2 - 0^2) - \frac{1}{12} \cdot (4^3 - 0^3) = \frac{9}{2} - \frac{27}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} u^2$$

B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A

b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX = B$

a) Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow (\text{Existe}) \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Resuelve $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \Rightarrow \text{Solución imaginaria} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$(A + B)x^2 + Cx + A = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} (\text{en } x^2) \Rightarrow A + B = 1 \\ (\text{en } x) \Rightarrow C = 0 \\ (\text{independiente}) \Rightarrow A = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 + B = 1 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x + 0}{x^2 + 1}$$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Solución imaginaria} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$(A + B)x^2 + Cx + A = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} (\text{en } x^2) \Rightarrow A + B = 1 \\ (\text{en } x) \Rightarrow C = 0 \\ (\text{independiente}) \Rightarrow A = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 + B = 1 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow$$

$$= \frac{-1}{x} + \frac{2x + 0}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = -\ln x + \int \frac{dt}{t} = -\ln x + \ln t = \ln \frac{t}{x} = \ln \frac{x^2 + 1}{x} + K$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt$$

B Dadas las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ \lambda = 2 + 2\mu \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 0 = \mu \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow 0 = 2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow 0 \neq 4 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \\ -\lambda = 0 \end{cases}$$

Las rectas no son coincidentes ni secantes con punto de corte $\Rightarrow$

Veamos si son coincidentes o se cruzan

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{No son coincidentes} \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b) Hallaremos el vector de la recta t , como un elemento general apoyado en r y s , siendo este perpendicular a los vectores directores de las rectas y los dos productos vectoriales que genera con cada uno de ellos es nulo.

$$\begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ \lambda = 2 + 2\mu \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 0 = \mu \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow 0 = 2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow 0 \neq 4 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ -\lambda = 0 \end{cases}$$

Las rectas no son coincidentes ni secantes con punto de corte $\Rightarrow$

Veamos si son coincidentes o se cruzan

$$\begin{cases} \vec{v}_t = (1 + \lambda - \mu, \lambda - 2 - 2\mu, -\lambda) \\ \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1 + \lambda - \mu, \lambda - 2 - 2\mu, -\lambda) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda - \mu + \lambda - 2 - 2\mu + \lambda = 0 \\ (1 + \lambda - \mu, \lambda - 2 - 2\mu, -\lambda) \cdot (1, 2, 0) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda - \mu + 2\lambda - 4 - 4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 - 3\mu + 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda - 3\mu = 1 \\ 3\lambda - 3 - 5\mu = 0 \Rightarrow 3\lambda - 5\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda - 3\mu = 1 \\ -3\lambda + 5\mu = -3 \end{cases} \Rightarrow 2\mu = -2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow$$

$$3\lambda - 3 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 1 \Rightarrow 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_t = \left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right) - (-1), \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2 \cdot (-1), -\left(-\frac{2}{3}\right) \right] = \left(2 - \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{v}_t = (4, -2, 2) \equiv (2, -1, 1) \Rightarrow \text{Punto en recta } s \Rightarrow S \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 2 \cdot (-1) \Rightarrow S(-1, 0, 0) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = z$$

TERCER BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor de k calculado derivable en $x = 1$?

a)

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + k = k + 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Rightarrow \text{Derivable}$$

B Determina las coordenadas del punto simétrico del $A(-2, 1, 6)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Hallaremos un plano π perpendicular a la recta r , que tiene como vector director el de la recta, y que contenga al punto A , por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por A y el punto G , genérico del plano, como son perpendiculares tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado.

Una vez obtenido el plano hallaremos el punto Q de corte de ella con la recta r que es el punto medio entre A y su simétrico A'

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (-2, 1, 6) = (x+2, y-1, z-6) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow (1, 2, 2) \cdot (x+2, y-1, z-6) = 0 \Rightarrow x+2+2y-2+2z-12=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+2z-12=0$$

$$\text{Punto de corte } Q \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(-1+1, 3+2 \cdot 1, -1+2 \cdot 1) \Rightarrow Q(0, 5, 1) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{-2 + x_A}{2} \Rightarrow x_A = 2 \quad 5 = \frac{1 + y_A}{2} \Rightarrow y_A = 9 \quad 1 = \frac{6 + z_A}{2} \Rightarrow z_A = 4 \Rightarrow$$

$$A'(2, 9, 4)$$

CUARTO BLOQUE**A** Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} &= \frac{1 - \cos 0}{(e^0 - 1)^2} = \frac{1 - 1}{(1 - 1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(e^x - 1)e^x} = \\
 &= \frac{\sin 0}{2(e^0 - 1)e^0} = \frac{0}{2 \cdot (1 - 1) \cdot 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2[e^x e^x + e^x(e^x - 1)]} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(e^{2x} + e^{2x} - e^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(2e^{2x} - e^x)} = \frac{\cos 0}{2(2e^0 - e^0)} = \frac{1}{2(2 \cdot 1 - 1)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

B Discute y resuelve - en los casos que sea posible - el siguiente sistema:

$$\begin{cases}
 ax + y - z = 1 \\
 x + 2y + z = 2 \\
 x + 3y - z = 0
 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a + 1 - 3 + 2 - 3a + 1 = -5a + 1 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -5a + 1 = 0 \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{5} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Solución para los casos de Sistema Compatible Determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1 - 5a} = \frac{-2 - 6 - 3 + 1}{1 - 5a} = \frac{-10}{1 - 5a} = \frac{10}{5a - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1 - 5a} = \frac{-2a + 1 + 2 + 1}{1 - 5a} = \frac{-2a + 4}{1 - 5a} = \frac{2(4 - a)}{1 - 5a} = \frac{2(a - 4)}{5a - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{1 - 5a} = \frac{2 + 3 - 2 - 6a}{1 - 5a} = \frac{3 - 6a}{1 - 5a} = \frac{3(1 - 2a)}{1 - 5a} = \frac{3(2a - 1)}{5a - 1}$$

Continuación Problema B del Cuarto Bloque

$$\text{Si } a = \frac{1}{5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -12 & 15 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$$0z = 9 \Rightarrow z = \frac{9}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$