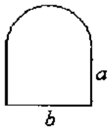
PRIMER BLOQUE

A Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por una semicircunferencia (ver dibujo). 

Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6 m, halla las dimensiones a y b para que la superficie sea máxima

$$\begin{cases} 6 = 2a + b + \dfrac{\pi b}{2} \Rightarrow 6 = \dfrac{4a + (\pi + 2)b}{2} \Rightarrow 12 = 4a + (\pi + 2)b \Rightarrow 12 - (\pi + 2)b = 4a \\ S = a \cdot b + \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}{2} = a \cdot b + \dfrac{\pi b^2}{8} = \dfrac{8ab + \pi b^2}{8} = b\dfrac{8a + \pi b}{8} \end{cases}$$

$$S = b\frac{2[12 - (\pi + 2)b] + \pi b}{8} = b\frac{24 - 2\pi b - 4b + \pi b}{8} = b\frac{24 - 4b - \pi b}{8} =$$

$$S = b\frac{24 - (4 + \pi)b}{8} = \frac{1}{8}\left[24b - (4 + \pi)b^2\right]$$

$$S' = \frac{dS}{db} = \frac{1}{8}[24 - 2(4 + \pi)b] = \frac{1}{4}[12 - (4 + \pi)b] \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}[12 - (4 + \pi)b] = 0$$

$$\Rightarrow 12 - (4 + \pi)b = 0 \Rightarrow (4 + \pi)b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{4 + \pi}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{db^2} = \frac{1}{4}[-(4 + \pi)] = -\frac{4 + \pi}{4} < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{12}{4 + \pi}\ m. \\ a = \dfrac{12 - (\pi + 2) \cdot \dfrac{12}{4 + \pi}}{4} = \dfrac{\dfrac{12\,(4 + \pi - \pi - 2)}{4 + \pi}}{4} = 3 \cdot \dfrac{2}{4 + \pi} = \dfrac{6}{4 + \pi}\ m. \end{cases}$$

B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1º- Halla la inversa de $2A - BC$. 2º- Resuelve la ecuación matricial $2AX = BCX + A^2$

a) Para que exista la inversa de una matriz su determinante no puede ser nulo

$$\left\{\begin{array}{l} 2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ B\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow 2A - BC = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|2A - BC| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 18 = -9 \neq 0 \Rightarrow Existe\ \exists(2A - BC)^{-1} \Rightarrow$$

$$(2A - BC)^{-1} = \frac{1}{|2A - BC|}\left[adj(2A - BC)^t\right] \Rightarrow (2A - BC)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(2A - BC)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2A - BC)^{-1} = \frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$b)$

$$(2A - BC)X = A^2 \Rightarrow (2A - BC)^{-1}(2A - BC)X = (2A - BC)^{-1}A^2 \Rightarrow X = (2A - BC)^{-1}A^2$$

$$X = \frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix} -3 & -24 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+2}, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Continuidad

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{4}{0+2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^2 - 0 + 2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow Continua\ en\ x = 0$$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{(x+2)^2} & si \quad x<0\\ 2x-1 & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\dfrac{4}{(0+2)^2}=-\dfrac{4}{4}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0-1=-1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow Derivable\ en\ x=0$$

B Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\ x-2y-1=0\end{cases}$, y el punto $A(-1,3,2)$.

1º- Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por A y es paralela a r.

2º- Calcula la distancia de s a r.

1º.- Es una recta **s** que tiene como vector director el de la recta **r**

$$x=1+2y \Rightarrow 1+2y+y+z=0 \Rightarrow z=-1-3y \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1-3\lambda\end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}=(2\ ,1\ ,-3) \Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-1+2\mu\\ y=3+\mu\\ z=2-3\mu\end{cases}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

2º.- Hallaremos un plano π perpendicular a la recta **s**, que tiene como vector director el de las rectas , y que contenga al punto **A**, por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por **A** y el punto **G**, genérico del plano, como son perpendiculares tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado.

Hallado el plano buscaremos el punto **Q** de intersección, de este, con la recta **r**, la distancia **AQ** es la distancia entre **r** y **s**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,1\ ,-3) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z) - (-1\ ,3\ ,2) = (x+1\ ,y-3\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2\ ,1\ ,-3)\cdot(x+1\ ,y-3\ ,z-2) = 0 \Rightarrow 2x+2+y-3-3z+6 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-3z+5=0 \Rightarrow$$

$$2(1+2\lambda)+\lambda-3(-1-3\lambda)+5=0 \Rightarrow 2+4\lambda+\lambda+3+9\lambda+5=0 \Rightarrow 14\lambda+10=0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{5}{7} \Rightarrow Punto\ Q\left[1+2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right),-\frac{5}{7},-1-3\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\right] \Rightarrow Q\left(-\frac{3}{7},-\frac{5}{7},\frac{8}{7}\right) \Rightarrow$$

$$d(r\ ,s) = d(A\ ,Q) = \sqrt{\left[-1-\left(-\frac{3}{7}\right)\right]^2 + \left[3-\left(-\frac{5}{7}\right)\right]^2 + \left(2-\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$d(r\ ,s) = \sqrt{\left(-\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{26}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2}\ \sqrt{\frac{16+676+36}{49}} = \frac{\sqrt{728}}{7} = \frac{2\sqrt{182}}{7}\ u$$

TERCER BLOQUE

A Halla el polinomio P(x) cuya derivada sea $6x^2 - 6x - 36$ y que además P(x) alcance un máximo y un mínimo relativos tales que el valor máximo del polinomio sea doble que el valor mínimo. Halla también esos valores máximo y mínimo.

$$6x^2-6x-36=0 \Rightarrow 6(x^2-x-6)=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25>0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+5}{2}=3 \\ x=\dfrac{1-5}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow P''(x)=12x-6 \Rightarrow \begin{cases} P''(3)=12\cdot3-6=30>0 \Rightarrow Mínimo \\ P''(-2)=12\cdot(-2)-6=.30<0 \Rightarrow Máx. \end{cases}$$

$$P(x)=\int(6x^2-6x-36)dx = 6\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3-6\cdot\frac{1}{2}x^2-36x=2x^3-3x^2-36x+K$$

$$Como\ P(-2)=2\cdot P(3) \Rightarrow 2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-36\cdot(-2)+K=2(2\cdot3^3-3\cdot3^2-36\cdot3+K) \Rightarrow$$

$$-16-12+72+K=2\cdot(54-27-108+K) \Rightarrow 44+K=2(K-81) \Rightarrow 44+K=2K-162 \Rightarrow$$

$$K=162+44=206 \Rightarrow P(x)=2x^3-3x^2-36x+206$$

$$P(3)=2\cdot3^3-3\cdot3^2-36\cdot3+206=125 \quad P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-36\cdot(-2)+206=250$$

B Clasifica según los valores del parámetro a y resuelve cuando sea posible $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y + z = a \\ 2x - 4y = 10 \\ x - 3z = a + 1 \end{cases}$

Para que el sistema sea compatible (determinado o indeterminado) una de las ecuaciones tiene que ser combinación lineal de las otras tres, por eso el determinante de los coeficientes ampliado tiene que ser nulo

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & -4 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & A+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & a+1-10 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Es claro que la tercera ecuación es combinación lineal de la primera, el sistema queda así

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y + z = a \\ x - 3z = a + 1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

Es Compatible Determinado para todo valor de $a \in \Re$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-15 - 2(a+1) - 6a}{-5} = \frac{-15 - 2a - 2 - 6a}{-5} = \frac{-17 - 8a}{-5} = \frac{17 + 8a}{5}$$

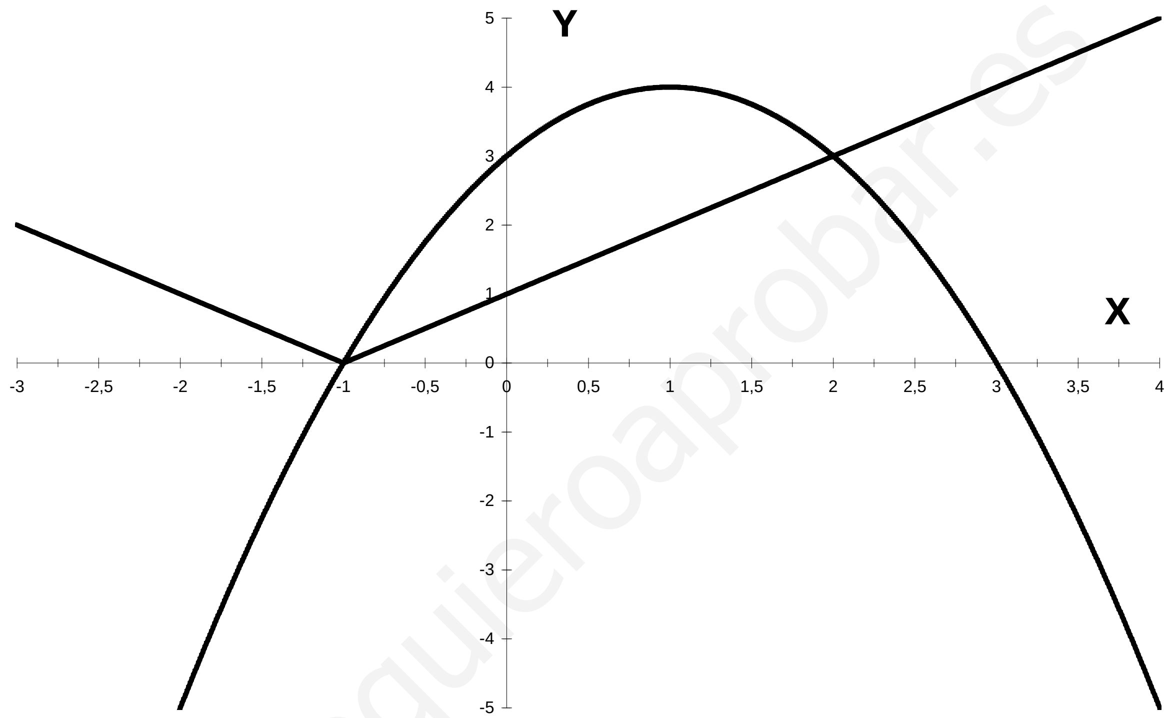
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3a + 5 - (a+1)}{-5} = \frac{-4a + 4}{-5} = \frac{4(1-a)}{-5} = \frac{4(a-1)}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(a+1) - 2a - 5}{-5} = \frac{-a - 4}{-5} = \frac{a + 4}{5}$$

CUARTO BLOQUE

A Dibuja: el recinto delimitado por las curvas $y = -x^2 + 2x + 3$ e $y = |x + 1|$. Halla el área del recinto.

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow y=\begin{cases} -x-1 & si \quad x<-1 \\ x+1 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$$



$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ funciones \Rightarrow \begin{cases} -x^2+2x+3=-x-1 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \\ -x^2+2x+3=x+1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-3x-4=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 4=25>0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow No\ es\ solución \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2-x-2=0\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2=9>0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+2x+3\right)dx-\int_{-1}^{2}(x+1)\,d=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{2}+\cdot[x]_{-1}^{2}$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[2^3-(-1)^3\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[2^2-(-1)^2\right]+\left[2-(-1)\right]=-\frac{9}{3}+\frac{3}{2}+3=-\frac{9}{3}+\frac{9}{2}=\frac{-18+27}{3}=3\ u^2$$

B Dado el punto $A(1,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + z = 1$, calcula:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A y es perpendicular a π

b) Ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π

c) El punto simétrico de A respecto a π

a) El vector director de la recta es el del plano porque este es perpendicular a él.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (2,1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Es un plano α que tiene el mismo vector director que el plano π que es perpendicular al vector formado por **A** y **G**, siendo este punto el genérico del plano, y por ello el producto escalar de los dos vectores es nulo y la ecuación pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = \overrightarrow{v_\pi} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z) - (1,1,0) = (x-1, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2,1,1)\cdot(x-1, y-1, z) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + y - 1 + z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

c) Hallaremos una recta que es perpendicular al plano π y que contenga el punto **A**, trabajo ya realizado en el apartado a) y que es la recta **r**

Una vez hallada la recta **r,** calcularemos el punto **Q** de intersección del plano π con la recta, punto que es el medio entre **A y A'**

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(1 + 2\lambda) + 1 + \lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda + 2\lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$6\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q\begin{cases} x = 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ y = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 3 + 3x_{A'} = 2 \Rightarrow 3x_{A'} = -1 \Rightarrow x_{A'} = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 3 + 3y_{A'} = 4 \Rightarrow 3y_{A'} = 1 \Rightarrow y_{A'} = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} = \frac{0 + z_{A'}}{2} \Rightarrow 3z_{A'} = -2 \Rightarrow z_{A'} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$