

PRIMER BLOQUE

A La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{L(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x=0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c . ($L = \logaritmo \text{ neperiano}$).

Para ser derivable, inicialmente tiene que ser continua

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + b \cdot 0 + c = c \\ \lim_{x \rightarrow 0^0} f(x) = \frac{L(1+0)}{0} = \frac{L \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{1}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{array} \right.$$

Para que sea continua $c = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2x + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \cdot 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^0} f'(x) = \frac{0 - (1+0)L(1+0)}{0^2(1+0)} = \frac{0}{0} \end{cases} \\ b &= \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{x - (1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{1 - \left[L(1+x) + \frac{1+x}{1+x} \right]}{2x(1+x) + x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{1 - L(1+x) - 1}{2x(1+x) + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{-L(1+x)}{2x + 3x^2} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} = \\ &= \frac{-\frac{1}{1+0}}{2 + 6 \cdot 0} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Para ser derivable} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

B Considera el plano $\pi \equiv x - y + 1 = 0$ y el punto $A(2,0,1)$.

- Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto A
- Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano π .

a) El vector director de la recta es el del plano, ya que este es perpendicular al plano

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, -1, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

b) Hallaremos una recta r que pasando por A sea perpendicular al plano π , como el vector director de este es perpendicular a él este será el vector director de la recta. Se halla en el apartado a)

Una vez obtenida la recta r hallaremos el punto Q de corte de ella con el plano que es el punto medio entre A y su simétrico B

Hallemos el punto Q

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda - (-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 3 + \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \\ \pi \equiv x - y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$Q \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) \\ y = -\left(-\frac{3}{2}\right) \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow 2 + x_B = 1 \Rightarrow x_B = -1 \\ \frac{3}{2} = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow 2y_B = 6 \Rightarrow y_B = 3 \Rightarrow B(-1, 3, 1) \\ 1 = \frac{1 + z_B}{2} \Rightarrow z_B + 1 = 2 \Rightarrow z_B = 1 \end{array} \right.$$

SEGUNDO BLOQUE

A Un solar rectangular de 11.250 m² se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura



) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.

Siendo L la longitud total y A el ancho

$$\left\{ \begin{array}{l} 11250 = LA \Rightarrow L = \frac{11250}{A} \Rightarrow P = 2 \cdot \frac{11250}{A} + 4A = \frac{22500 + 4A^2}{A} = 4 \frac{5625 + A^2}{A} \\ P = 2L + 4A \end{array} \right.$$

$$P' = \frac{dP}{dA} = 4 \frac{2A \cdot A - (5625 + A^2)}{A^2} = 4 \frac{2A^2 - 5625 - A^2}{A^2} = 4 \frac{A^2 - 5625}{A^2} \Rightarrow \text{Si } P' = 0 \Rightarrow$$

$$4 \frac{A^2 - 5625}{A^2} = 0 \Rightarrow A^2 - 5625 = 0 \Rightarrow A^2 = 5625 \Rightarrow A = \pm \sqrt{5625} \Rightarrow \begin{cases} A = 75 \\ A = -75 \Rightarrow \text{No sol.} \end{cases}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dA^2} = 4 \frac{2A \cdot A^2 - 2A(A^2 - 5625)}{A^4} = 8 \frac{A^2 - (A^2 - 5625)}{A^3} = 8 \frac{A^2 - A^2 + 5625}{A^3}$$

$$P'' = \frac{45000}{A^3} \Rightarrow P''(75) = \frac{45000}{75^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} A = 75 \text{ m.} \\ L = \frac{11250}{75} = 150 \text{ m.} \end{cases}$$

B Discute según los valores del parámetro a el sistema
$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

Aplicar la regla de Cramer supone que el Sistema es Compatible Determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \text{por Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado}$
Se puede aplicar la regla de Cramer

Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow$$

$$z = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{No existe solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

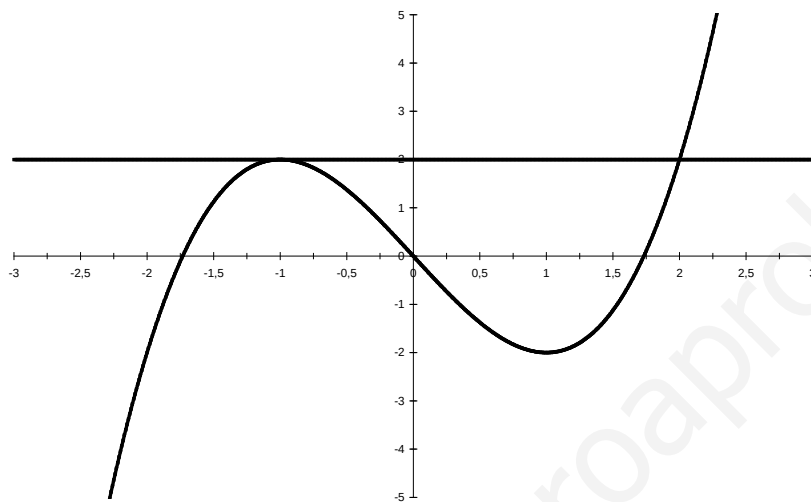
Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{No existe solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

TERCER BLOQUE

A Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x=-1$.
Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow \begin{cases} y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \\ m = y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 0 \cdot [x - (-1)] \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$



$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 (x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^0 2 \, dx - \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) \, dx + \int_0^{\sqrt{3}} 2 \, dx + \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx \right| + \int_{\sqrt{3}}^2 2 \, dx - \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) \, dx$$

$$A = \int_{-1}^2 2 \, dx - \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) \, dx - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx - \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) \, dx = \int_{-1}^2 2 \, dx - \int_{-1}^2 (x^3 - 3x) \, dx$$

$$A = \int_{-1}^2 2 \, dx - \int_{-1}^2 (x^3 - 3x) \, dx = \int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) \, dx = 2 \cdot [x]_{-1}^2 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-1}^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^2$$

$$A = 2 \cdot [2 - (-1)] - \frac{1}{4} \cdot [2^4 - (-1)^4] + \frac{3}{2} \cdot [2^2 - (-1)^2] = 2 \cdot 3 - \frac{15}{4} + \frac{9}{2} = \frac{24 - 15 + 18}{4} = \frac{27}{4} u^2$$

B Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,0,2), es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3 \text{ y perpendicular al plano } \pi \equiv 2x - y + z = 0.$$

El plano α queda determinado por el vector de la recta r , el vector director del plano π y el vector determinado por P y G , siendo G el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y el ultimo vector es combinación lineal de los otros dos y, debido a ello, el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación que se busca

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{v}_\pi = (2, -1, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x-1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1) + 2y - 2(z-2) - 6(z-2) + (x-1) - 2y = 0 \Rightarrow 4(x-1) - 8(z-2) = 0 \Rightarrow (x-1) - 2(z-2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - 2z + 3 = 0$$

CUARTO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$. Calcula: a) Los máximos y mínimos relativos. b) Las asíntotas. c) Los puntos de inflexión.

a)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2 - 1)}{x^6} = \frac{2x^2 - 3(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^2 - 3x^2 + 3}{x^4} = \frac{-x^2 + 3}{x^4}$$

$$\text{Si } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 3}{x^4} = 0 \Rightarrow -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - 4x^3(-x^2 + 3)}{x^8} = \frac{-2x^2 - 4(-x^2 + 3)}{x^5} = \frac{-2x^2 + 4x^2 - 12}{x^5}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^5} \Rightarrow \begin{cases} f''(-\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 12}{(-\sqrt{3})^5} = \frac{2 \cdot 3 - 12}{-9\sqrt{3}} = \frac{-6}{-9\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0 \Rightarrow \text{Min.} \\ f''(\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (\sqrt{3})^2 - 12}{(\sqrt{3})^5} = \frac{2 \cdot 3 - 12}{9\sqrt{3}} = \frac{-6}{9\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} > 0 \Rightarrow \text{Min} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 - 1}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{3 - 1}{-3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \\ \text{Máximo relativo} \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{3 - 1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

b)

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^3} = -\frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 0$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{\infty}{-\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación del Problema A del Cuarto Bloque*b) Continuación**Asíntotas oblicuas*

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ *c)*

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^5} = 2 \frac{(x^2 - 6)}{x^5} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \frac{(x^2 - 6)}{x^5} = 0 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \frac{4x \cdot x^5 - 5x^4(2x^2 - 12)}{x^{10}} = \frac{4x^2 - 5(2x^2 - 12)}{x^6}$$

$$f'''(x) = \frac{4x^2 - 10x^2 + 60}{x^6} = \frac{-6x^2 + 60}{x^6} \Rightarrow \begin{cases} f'''(-\sqrt{6}) = \frac{-6 \cdot (-\sqrt{6})^2 + 60}{(-\sqrt{6})^6} = \frac{-36 + 60}{6^3} \neq 0 \\ f'''(\sqrt{6}) = \frac{-6 \cdot (\sqrt{6})^2 + 60}{(\sqrt{6})^6} = \frac{-36 + 60}{6^3} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = -\sqrt{6} \Rightarrow f(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^2 - 1}{(-\sqrt{6})^3} = \frac{6 - 1}{-6\sqrt{6}} = -\frac{5}{6\sqrt{6}} = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow f(\sqrt{6}) = \frac{(\sqrt{6})^2 - 1}{(\sqrt{6})^3} = \frac{6 - 1}{6\sqrt{6}} = \frac{5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{36}$$

B Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$.

a)

$$3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & x \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & x \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$$

b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 5 + 10 \cdot 0 = \frac{25}{3}$$